

數學二試題

一、填充題：(每格 5 分，共 85 分。)

1. 兩非零實數 x 、 y 滿足 $\begin{cases} |y| - \frac{3x}{|x|} = -2 \\ |x|x + y|y| = 8 \end{cases}$ ，求數對 $(x,y) = \underline{(1)}$ 。

2. 對於任意實數 x ， $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，例如 $[1.8]=1$ ， $[-3.4]=-4$ ， $[7]=7$ 。

求 $\frac{[\sqrt{1}] \times [\sqrt{3}] \times [\sqrt{5}] \times [\sqrt{7}] \times \dots \times [\sqrt{105}]}{[\sqrt{2}] \times [\sqrt{4}] \times [\sqrt{6}] \times [\sqrt{8}] \times \dots \times [\sqrt{106}]}$ 的值 = (2)。

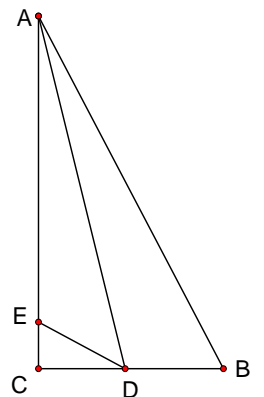
3. 因式分解： $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 = \underline{(3)}$ 。

4. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1=1$ ， $a_2 = \frac{a_1}{1+a_1}$ ， $a_3 = \frac{a_2}{1+2a_2}$ ， $a_4 = \frac{a_3}{1+3a_3}$ ， \dots ， $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n}$ (n 是正整數)，

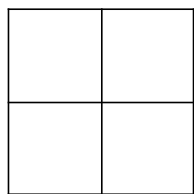
求 a_{2018} 的值 = (4)。

5. 將 $\underbrace{555\dots5}_{100\text{個}} \times \underbrace{666\dots6}_{100\text{個}}$ 的乘積以十進位表示，求各位數字的總和 = (5)。

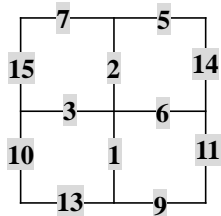
6. 如右圖所示， $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\overline{BC}=15$ ， D 、 E 兩點分別在 \overline{BC} 、 \overline{AC} 上， $\overline{BD}=\overline{DE}$ ， $\angle BAD=\angle CAD$ 。若 $\overline{CE}=3$ ，求 \overline{AB} 的長 = (6)。



7. 如下圖(一)所示是一個大正方形和四個小正方形，現將 **1、2、3、5、6、7、9、10、11、13、14、15** 填入各個小正方形的邊上，每條邊上恰填入一個數，使得每一個小正方形的四條邊上的數之和 S 均相等，如下圖(二)中，每一個小正方形的四條邊上的數之和 S 均等於 27。試問 S 的最大值 = (7)。

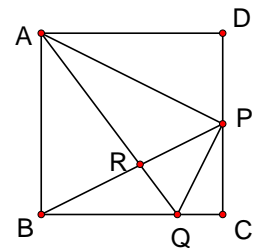


圖(一)

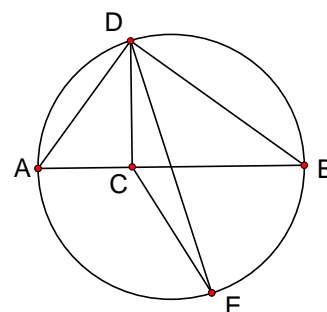


圖(二)

8. 如右圖所示， $ABCD$ 是一正方形，點 P 是 \overline{CD} 的中點，點 Q 在 \overline{BC} 上，且 $\angle APQ=90^\circ$ ，若 \overline{AQ} 與 \overline{BP} 交於點 R ，求 $\frac{\overline{BR}}{\overline{RP}}$ 的值 = (8)。



9. 設 a 、 b 都是整數， $-30 \leq a \leq 30$ ， $-30 \leq b \leq 30$ 。若兩個一元二次方程式 $x^2+ax+b=0$ 與 $x^2+bx+a=0$ 至少有一個相同根，求滿足此條件的數對 (a,b) 共有 (9) 組。



10. 如右圖所示， \overline{AB} 為圓的直徑，C 為 \overline{AB} 上的一點使得 $3\overline{AC} = 2\overline{BC}$ ，又 D 與 E 為圓周上的兩點使得 \overline{DE} 為圓的另一直徑且 $DC \perp AB$ 。

若 $\triangle CDE$ 的面積為 a ， $\triangle ABD$ 的面積為 b ，求 $\frac{a}{b}$ 的值 = (10)。

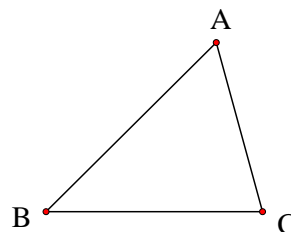
11. 求 $\frac{3^2-5}{1 \times 5} + \frac{7^2-5}{5 \times 9} + \frac{11^2-5}{9 \times 13} + \frac{15^2-5}{13 \times 17} + \dots + \frac{43^2-5}{41 \times 45}$ 的值 = (11)。

12. 農曆以十天干(甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸)與十二地支(子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥)紀年，即甲子、乙丑、丙寅、丁卯、...、癸酉、甲戌、乙亥、...、癸未、甲申、...，以 60 年為一週期，俗稱「一甲子」。已知民國 73 年是農曆甲子年，問：民國 150 年是農曆 (12) 年。

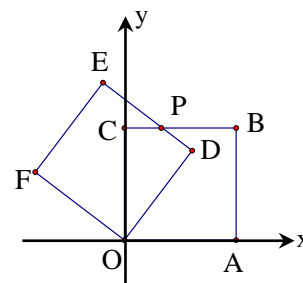
13. 已知 x 是一個二位數，且 x^3 的個位數字是 3、十位數字是 2、求 $x =$ (13)。

14. 已知 a 、 b 、 c 、 d 是 4 個相異的正整數，且 $a > b > c > d$ 。從這 4 個正整數中，任取兩個不同的數，由大數減小數所得的差為 4、5、8、9、13、17。求 $a+b-c-d$ 的值 = (14)。

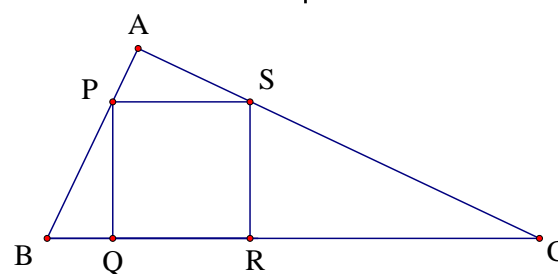
15. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ 、 $\angle B = 45^\circ$ 、 $\overline{AB} = \sqrt{3} + 1$ 、 $\overline{AC} = 2$ ，分別在 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 上各找一個點 P 、 Q 、 R ，使 $APQR$ 為菱形。求菱形 $APQR$ 的邊長 = (15)。



16. 如右圖，已知 O 為原點， A 點坐標為 $(5,0)$ ，將正方形 $OABC$ 旋轉至正方形 $ODEF$ ，若 D 點坐標為 $(3,4)$ ，且 \overline{DE} 交 \overline{BC} 於 P 點，則 P 點坐標為 (16)。



17. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ 、 $\overline{BC} = 7$ ， $\overline{AB} < \overline{AC}$ ， P 點在 \overline{AB} 上， Q 點、 R 點在 \overline{BC} 上， S 點在 \overline{AC} 上，正方形 $PQRS$ 的邊長是 2，求 \overline{AB} 的長度 = (17)。



二、證明與作圖：(共 15 分)

1. 試證： $\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$ 。

(共 8 分)

2.

已知：如上圖， A 、 B 兩點在 L 線的上方，且 \overline{AB} 與 L 線不平行。

求作：一個圓，使得這個圓通過 A 、 B 兩點，且與 L 線相切。

(註：符合條件的有大、小兩個圓，請畫出小圓。)

(共 7 分)