高雄中學 107 學年度第一學期高一數學科第二次月考試題

範圍: 3-1~3-3

(請將答案用原子筆寫在答案卷上,請小心計算,Good Luck!!)

一、 填充題:(共計 86 分)

1. 若三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,則下列敘述何者正確?(A)若 $a,b,c,d\in R$ 且 $f(2-3i)=4$,則 $f(2+3i)=-4$.
(B)若 $a,b,c,d\in \mathbb{Q}$ 且 $f(1+\sqrt[3]{2})=0$,則 $f(1-\sqrt[3]{2})=0$.(C)若 $a,b,c,d\in \mathbb{Z}$ 且 $2x+4$ 為 $f(x)$ 因式,則 $2|a$,$4|d$.(註: a 整除 $b \Leftrightarrow a|b$)
(D)若 $a,b,c,d\in N$,則方程式 $f(x)=0$ 必有負根. (E)若 $f(x)=0$ 有三個相異正根,則方程式 $f(x^4)=0$ 只有六個相異實根. ___(A)___

2. 已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(-2)=-56$,$f(-1)=-17$,$f(1)=1$,$f(3)=99$,求 $f(x)=$___(B)___(請將答案表示成 ax^3+bx^2+cx+d)

3. 已知 α,β,γ 為方程式 $x^3-x-3=0$ 的三個根,試求 $\dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}+\dfrac{1}{\gamma+1}=$___(C)___

4. 在座標平面上,若 $f(x)=mx^2-6x+5$ 之圖形恆在 $g(x)=2x^2-4mx+6$ 之圖形的下方,求 m 之範圍為___(D)___

5. 若 $f(x)=81x^4-162x^3+135x^2-60x+15$,求 $f(0.333)$ 的近似值到小數點以下第三位為___(E)___(第四位四捨五入)

6. 若 $a,b\in R$,且 $-1+2i$ 為多項式 $f(x)=x^4+3x^3+(a+1)x^2+ax+b$ 的一根,求 $f(-1+\sqrt{3})=$___(F)___

7. 實係數多項式 $f(x)$ 除以 $x+2$ 得餘式 74 ,且 $f(3-i)=7+3i$,則多項式 $f(x)$ 除以 $(x+2)(x^2-6x+10)$ 的餘式為___(G)___

8. 設函數 $f(x)=\left|x^2-6x\right|+k$,試求 k 的範圍為___(H)___使得方程式 $f(x)=-2x+3$ 有四個相異實根。

9. 設 $-2\le x\le 3$, $f(x)=(x^2-3x+2)(x^2-7x+12)+5$ 的最大值為 M ,最小值為 m ,求數對 $(M,m)=$___(I)___

10. 若a,b,c為實數，四次多項式 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+(1+i)x+4-3i$ 滿足 $f(2-3i)=7+24i$，試求 $f(2+3i)=$ ____(J)____

11. 若 $f(x)=2x^3-5x^2+x-107$，$g(x)=\dfrac{(a^2+1)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(b^2+1)(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{(c^2+1)(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$，(其中$a,b,c$為三個相異數)

滿足 $f(a)=g(a), f(b)=g(b), f(c)=g(c)$, 求 $abc=$ ____(K)____

12. 實係數四次方程式 $x^4-8x^3+24x^2+ax+b=0$ 為兩實根兩虛根，兩實根和為4，兩虛根乘積為5，求此方程式解 $x=$ ____(L)____

13. 若實數x,y,z滿足$\begin{cases}\dfrac{x}{2010}+\dfrac{y}{2013}+\dfrac{z}{2016}=1\\ \dfrac{x}{2011}+\dfrac{y}{2014}+\dfrac{z}{2017}=1\\ \dfrac{x}{2012}+\dfrac{y}{2015}+\dfrac{z}{2018}=1\end{cases}$，則 $x+y+z=$ ____(M)____

14. 有多少個各項係數為2018或-2018，且根全為實數的多項式? ____(N)____

二、計算證明題:(共計 14 分)

1. (1)試**敘述整係數一次因式檢驗法**並證明。 (5 分)

(2)試解出方程式 $2x^4+3x^3-6x^2-4x+3=0$ 的所有根為何? (4 分)

2. 設三次實係數多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $a+b+c+107d=0$，

試證明: $f(x)=0$ 在 $0\le x\le 1$ 的範圍內至少有一實根。 (5 分)

高雄中學 107 學年度第一學期高一數學科第二次月考答案卷

_______年_______組　　姓名:_______________　　座號:______

(請將答案用原子筆寫在答案卷上，請小心計算，Good Luck!!)

一、填充題:(共計 86 分)

1 格	2 格	3 格	4 格	5 格	6 格	7 格	8 格	9 格	10 格	11 格	12 格	13 格	14 格
10 分	20 分	30 分	38 分	46 分	54 分	60 分	66 分	70 分	74 分	78 分	82 分	84 分	86 分

(A) DE	(B) $4x^3-2x^2+5x-6$	(C) $\frac{2}{3}$	(D) $1<m<\frac{7}{4}$	(E) 5.004
(F) $28-7\sqrt{3}$	(G) $2x^2-15x+36$	(H) $-13<k<-9$	(I) $(365,4)$	(J) $1-26i$
(K) 54	(L) 1 或 3 或 $2\pm i$	(M) 6042	(N) 12	

二、計算證明題:(共計 14 分)

1.(1)定理敘述:若 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 為整係數 n 次多項式，且 $ax-b\,|\,f(x)$，其中 $a,b\in Z$，$(a,b)=1$，

則 $a|a_n$，$b|a_0$.　(2 分,敘述全對才給分)

定理證明: 由因式定理知道，$f(\frac{b}{a})=0$，帶入得

$$a_n(\frac{b}{a})^n+a_{n-1}(\frac{b}{a})^{n-1}+\cdots+a_0=0\Rightarrow a_nb^n+a_{n-1}ab^{n-1}+\cdots+a_0a^n=0$$

故得 $a_nb^n=-a(a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_0a^{n-1})\Rightarrow a|a_nb^n$，又因為 $(a,b)=1$，所以得 $a|a_n$，

同理，$b|a_0$，故得證。(3 分)

(2) $x=-1$ 或 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.(4 分)

2.(5 分)

證明:若 $f(0)=0$ 或 $f(1)=0$，則結論成立。

若 $f(0)\neq 0$ 且 $f(1)\neq 0$，則因為 $f(0)f(1)=d(a+b+c+d)=d\cdot(-106d)=-106d^2<0$.

根據勘根定理知，存在實數 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=0$.