108 學年度學科能力測驗數學考科試題詳解

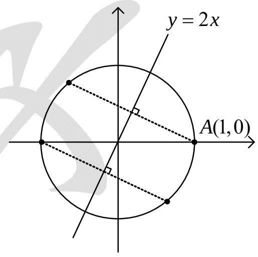
一、單選題

1. 點 $A(1,0)$ 在單位圓 $\Gamma: x^2+y^2=1$ 上。試問：Γ 上除了 A 點以外，還有幾個點到直線 $L: y=2x$ 的距離，等於 A 點到 L 的距離？

(1) 1個　(2) 2個　(3) 3個　(4) 4個　(5) 0個

【108學測】

答案：(3)



解析：$L: 2x-y=0$，$d(A,L)=\dfrac{2}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\approx 0.5\cdots<1$

由圖形知：還有 3 個點到直線 $L: y=2x$ 的距離，等於 A 點到 L 的距離

2. 下列哪一個選項是方程式 $x^3-x^2+4x-4=0$ 的解？（註：$i=\sqrt{-1}$）

(1) $-2i$　(2) $-i$　(3) i　(4) 2　(5) 4

【108學測】

答案：(1)

解析：由牛頓定理知，可能的一次因式：$x\pm1$，$x\pm2$，$x\pm4$

$\Rightarrow x^3-x^2+4x-4=(x-1)(x^2+4)\Rightarrow x=1$，$2i$，$-2i$

3. 試問共有多少組正整數 (k,m,n) 滿足 $2^k4^m8^n=512$？

(1) 1組　(2) 2組　(3) 3組　(4) 4組　(5) 0組

【108學測】

答案：(3)

解析：原式 $\Rightarrow 2^k(2^2)^m(2^3)^n=512\Rightarrow 2^{k+2m+3n}=2^9\Rightarrow k+2m+3n=9$

$(k,m,n)=(2,2,1)$ or $(4,1,1)$ or $(1,1,2)$，共 3 組

4. 廚師買了豬、雞、牛三種肉類食材以及白菜、豆腐、香菇三種素類食材。若廚師想用完這六種食材作三道菜，每道菜可以只用一種食材或用多種食材，但每種食材只能使用一次，且每道菜一定要有肉，試問食材的分配共有幾種方法？

(1) 3　(2) 6　(3) 9　(4) 18　(5) 27

【108學測】

答案：(5)

解析：將三種素類食材任意分給肉類食材$\Rightarrow 3^3=27$（種）

5. 設正實數b滿足$(\log 100)(\log b)+\log 100+\log b=7$。試選出正確的選項？

(1) $1\le b\le\sqrt{10}$

(2) $\sqrt{10}\le b\le 10$

(3) $10\le b\le 10\sqrt{10}$

(4) $10\sqrt{10}\le b\le 100$

(5) $100\le b\le 100\sqrt{10}$

【108學測】

答案：(4)

解析：原式$\Rightarrow 2\log b+2+\log b=7\Rightarrow 3\log b=5\Rightarrow \log b=\dfrac{5}{3}\Rightarrow b=10^{\frac{5}{3}}$，$\dfrac{5}{3}\approx 1.67$

(4) $10\sqrt{10}\le b\le 100\Rightarrow 10^{\frac{3}{2}}\le 10^{\frac{5}{3}}\le 10^2$

6. 某超商依據過去的銷售紀錄，冬天平均氣溫在$6°C$到$24°C$時，每日平均售出的咖啡數量與當天的平均氣溫之相關係數為-0.99，部分紀錄如下表。

平均氣溫($°C$)	11	13	15	17	19	21
平均售出量(杯)	512	437	361	279	203	135

某日平均氣溫為$8°C$，依據上述資訊推測，試問該日賣出的咖啡數量應接近下列哪一個選項？

(1) 570杯　(2) 625杯　(3) 700杯　(4) 755杯　(5) 800杯

【108學測】

答案：(2)

解析：$\because$相關係數$\approx -1 \Rightarrow$趨近完全負相關$\Rightarrow x = 512 + (512-437)\times\dfrac{3}{2} = 624.5 \approx 625$

氣溫	數量
8	x
11	512
13	437

③②

二、多選題

7. 設各項都是實數的等差數列$a_1, a_2, a_3, \cdots$之公差為正實數α。試選出正確的選項。

(1) 若$b_n = -a_n$，則$b_1 > b_2 > b_3 > \cdots$

(2) 若$c_n = {a_n}^2$，則$c_1 < c_2 < c_3 < \cdots$

(3) 若$d_n = a_n + a_{n+1}$，則$d_1, d_2, d_3, \cdots$是公差為α的等差數列

(4) 若$e_n = a_n + n$，則$e_1, e_2, e_3, \cdots$是公差為$\alpha + 1$的等差數列

(5) 若f_n為$a_1, a_2, \cdots, a_n$的算術平均數，則$f_1, f_2, f_3, \cdots$是公差為α的等差數列

【108學測】

答案：(1)(4)

解析：$a_n = < a_1, a_1+\alpha, a_1+2\alpha, \cdots >$，$\alpha > 0$

(1) $b_n = -a_n = < -a_1, -a_1-\alpha, -a_1-2\alpha, \cdots > \Rightarrow b_1 > b_2 > b_3 > \cdots$

(2) 反例：$< a_n > = < -2, 0, 2, 4, \cdots >$ $< c_n > = < 4, 0, 4, 16, \cdots >$

(3) $< d_n > = < 2a_1+\alpha, 2a_1+3\alpha, 2a_1+5\alpha, \cdots >$ 公差$= 2\alpha$

(4) $< e_n > = < a_1+1, a_1+\alpha+2, a_1+2\alpha+3, \cdots >$ 公差$= \alpha+1$

(5) 反例：$< a_n > = < 1, 2, 3, 4, \cdots >$，$< f_n > = < 1, \dfrac{1+2}{2}, \dfrac{1+2+3}{3}, \cdots > = < 1, \dfrac{3}{2}, 2, \cdots >$

8. 在數線上，甲從點-8開始做等速運動，同時乙也從點10開始做等速運動，乙移動的速率是甲的a倍，且$a > 1$。試選出正確的選項。

(1) 若甲朝負向移動而乙朝正向移動，則他們會相遇

(2) 若甲朝負向移動且乙朝負向移動，則他們不會相遇

(3) 若甲朝正向移動而乙朝負向移動，則乙先到達原點0

(4) 若甲朝正向移動且乙朝正向移動，則他們之間的距離會越來越大

(5) 若甲朝正向移動而乙朝負向移動，且他們在點-2相遇，則$a = 2$

【108學測】

答案：(4)(5)

解析：(1) 朝相反方向移動，不會相遇

(2) 乙移動較快，兩人會相遇

(3) $a = 1.1$時，甲會先到原點

(4) 乙移動較快，差距會越來越大

(5) 甲走了6，乙走了12，乙的速度為甲的2倍，$a = 2$

9. 從1，2，3，4，5，6，7這七個數字中隨機任取兩數。試選出正確的選項。

(1) 其和大於10的機率為$\frac{1}{7}$

(2) 其和小於5的機率為$\frac{1}{7}$

(3) 其和為奇數的機率為$\frac{4}{7}$

(4) 其差為偶數的機率為$\frac{5}{7}$

(5) 其積為奇數的機率為$\frac{2}{7}$

【108學測】

答案：(3)(5)

解析：(1) 其和大於10 $\Rightarrow (7,6),(7,5),(7,4),(6,5) \Rightarrow \frac{4}{C_2^7} = \frac{4}{21}$

(2) 其和小於5 $\Rightarrow (1,2),(1,3) \Rightarrow \frac{2}{21}$

(3) 其和為奇數$\Rightarrow$偶數＋奇數$\Rightarrow \frac{3\times 4}{21} \Rightarrow \frac{4}{7}$

(4) 其差為偶數$\Rightarrow$偶數－偶數、奇數－奇數$\Rightarrow \frac{C_2^3 + C_2^4}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

(5) 其積為奇數$\Rightarrow$奇數×奇數$\Rightarrow \frac{C_2^4}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

10. 在$\triangle ABC$中，已知$50^\circ \le \angle A < \angle B \le 60^\circ$。試選出正確的選項。

(1) $\sin A < \sin B$

(2) $\sin B < \sin C$

(3) $\cos A < \cos B$

(4) $\sin C < \cos C$

(5) $\overline{AB} < \overline{BC}$

【108學測】

答案：(1)(2)

解析：(1) $50^\circ \le \angle A < \angle B \le 60^\circ \Rightarrow \sin A < \sin B$

(2) $\angle C = 180^{\circ} - (\angle A + \angle B) \Rightarrow 60^{\circ} < \angle C < 80^{\circ} \Rightarrow \sin B < \sin C$

(3) $50^{\circ} \le \angle A < \angle B \le 60^{\circ} \Rightarrow \cos A > \cos B$

(4) $60^{\circ} < \angle C < 80^{\circ} \Rightarrow \sin C > \cos C$（當 $\theta > 45°$，則 $\sin\theta > \cos\theta$）

(5) $\angle C > \angle A \Rightarrow \sin C > \sin A \Rightarrow \overline{AB} > \overline{BC}$

11. 某地區衛生機構成功訪問了 500 人，其中年齡為 $50-59$ 歲及 60 歲（含）以上者分別有 220 名及 280 名。這 500 名受訪者中，120 名曾做過大腸癌篩檢，其中有 75 名是在一年之前做的，有 45 名是在一年之內做的。已知受訪者中，60 歲（含）以上者曾做過大腸癌篩檢比率是 $50-59$ 歲者曾做過大腸癌篩檢比率的 3.5 倍。試選出正確的選項。

(1) 受訪者中年齡為 60 歲（含）以上者超過 60%

(2) 由受訪者中隨機抽取兩人，此兩人的年齡皆落在 $50-59$ 歲間的機率大於 0.25

(3) 由曾做過大腸癌篩檢的受訪者中隨機抽取兩人，其中一人在一年之內受檢而另一人在一之前受檢的機率為 $2\cdot\left(\frac{45}{120}\right)\left(\frac{75}{119}\right)$

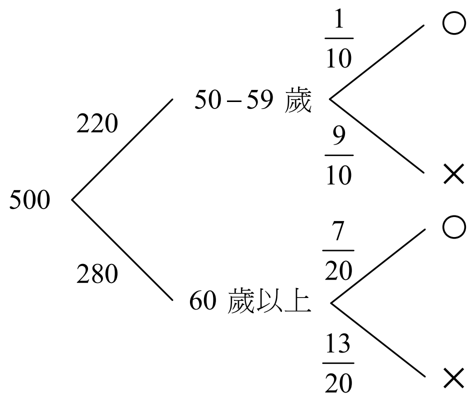
(4) 這 500 名受訪者中，未曾做過大腸癌篩檢的比率低於 75%

(5) 受訪者中 60 歲（含）以上者，曾做過大腸癌篩檢的人數超過 90 名

【108學測】

答案：(3)(5)

解析：(1) $\frac{280}{500} = 56\%$



(2) $\frac{C_2^{220}}{C_2^{500}} = \frac{220\times 219}{500\times 499} = 0.19\cdots$

(3) $\frac{45\times 75}{C_2^{120}} = 2\cdot(\frac{45}{120})\cdot(\frac{75}{119})$

(4) $\frac{380}{500}$=76%

(5) $220\times r + 280\times 3.5r = 120 \Rightarrow 1200r = 120 \Rightarrow r = \frac{1}{10}$，$280\times 3.5\times\frac{1}{10} = 98$

12. 設 $f_1(x), f_2(x)$ 為實係數三次多項式，$g(x)$ 為實係數二次多項式。已知 $f_1(x), f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式分別為 $r_1(x), r_2(x)$。試選出正確的選項。

(1) $-f_1(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $-r_1(x)$

(2) $f_1(x)+f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)+r_2(x)$

(3) $f_1(x)f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)r_2(x)$

(4) $f_1(x)$ 除以 $-3g(x)$ 的餘式為 $\dfrac{-1}{3}r_1(x)$

(5) $f_1(x)r_2(x)-f_2(x)r_1(x)$ 可被 $g(x)$ 整除

【108學測】

答案：(1)(2)(5)

解析：$f_1(x)=g(x)\cdot Q_1(x)+r_1(x) \quad f_2(x)=g(x)\cdot Q_2(x)+r_2(x)$

(1) $-f_1(x)=g(x)\cdot(-Q_1(x))+-r_1(x)$

(2) $f_1(x)+f_2(x)=g(x)\cdot[Q_1(x)+Q_2(x)]+r_1(x)+r_2(x)$

(3) $r_1(x)$ 、$r_2(x)$ 可能為 0 次或 1 次，$r_1(x)\cdot r_2(x)$ 可能為 2 次，餘式次方須小於除式

(4) $f_1(x)=(-3g(x))(-\frac{1}{3}Q_1(x))+r_1(x)$

(5) $f_1(x)r_2(x)-f_2(x)r_1(x)=[g(x)\cdot Q_1(x)+r_1(x)]r_2(x)-[g(x)\cdot Q_2(x)+r_2(x)]r_1(x)$

$$=g(x)\cdot[Q_1(x)\cdot r_2(x)-Q_2(x)r_1(x)]$$

13. 坐標空間中有一平面 P 過 $(0,0,0),(1,2,3)$ 及 $(-1,2,3)$ 三點。試選出正確的選項。

(1) 向量 $(0,3,2)$ 與平面 P 垂直

(2) 平面 P 與 xy 平面垂直

(3) 點 $(0,4,6)$ 在平面 P 上

(4) 平面 P 包含 x 軸

(5) 點 $(1,1,1)$ 到平面 P 的距離是 1

【108 學測】

答案：(3)(4)

解析：$(1,2,3)\times(-1,2,3)=(0,-6,4)$ 平面方程式：$3y-2z=0$

(1) $(0,3,2)$ 不平行 $(0,-6,4)$

(2) xy 平面法向量 $=(0,0,1)$，$(0,6,-4)\cdot(0,0,1)=-4\neq 0$

(3) $(0,4,6)$ 代入 $\Rightarrow 12-12=0$

(5) $\dfrac{3-2}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$

三、選填題

A. 設 x, y 為實數，且滿足 $\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ -6\end{bmatrix}$，則 $x+3y=$__________。

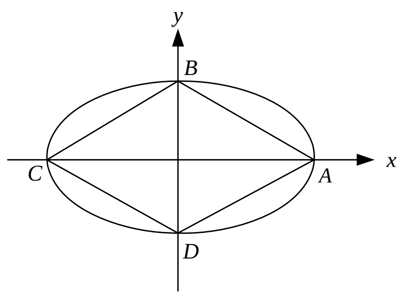
【108學測】

答案：-4

解析：$\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ -6\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3x-y+3=6\\ 2x+4y-1=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-y=3\\ 2x+4y=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

所求 $x+3y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{9}{2}=-4$

B. 如圖（此為示意圖），A,B,C,D 是橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的頂點。若四邊形 $ABCD$ 的面積為 58，則 $a=$__________。（化為最簡分數）

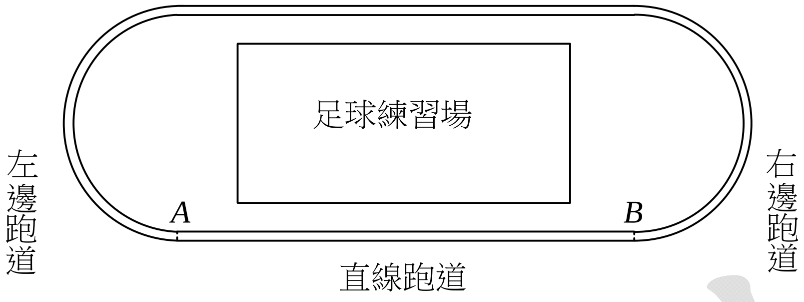


【108學測】

答案：$\dfrac{29}{4}$

解析：$b=4$，$\triangle OAB=ABCD\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\times a\times b\Rightarrow\dfrac{58}{4}=2a\Rightarrow a=\dfrac{29}{4}$

C. 某高中已有一個長 90 公尺，寬 60 公尺的足球練習場。若想要在足球練習場的外圍鋪設內圈總長度為 400 公尺的跑道，跑道規格為左右兩側各是直徑相同的半圓，而中間是上下各一條的直線跑道，直線跑道與足球練習場的長邊平行（如示意圖）。則圖中一條直線跑道 $\overline{AB}$ 長度的最大可能整數值為_________公尺。



【108學測】

答案：105

解析：要使跑道 $\overline{AB}$ 最大，則左右半圓的直徑要最小

當左右半圓的直徑為 60 公尺時，$\overline{AB}$ 會最大

操場總長 $2\overline{AB}+60\pi=400 \Rightarrow 2\overline{AB}+60\times 3.142=400 \Rightarrow 2\overline{AB}=211.48 \Rightarrow \overline{AB}=105.74$

$\overline{AB}$ 長度最大可能整數為 105 公尺

D. 某次選舉中進行甲、乙、丙三項公投案，每項公投案一張選票，投票人可選擇領或不領。投票結束後清點某投票所的選票，發現甲案有 765 人領票、乙案有 537 人領票、丙案有 648 人領票，同時領甲、乙、丙三案公投票的有 224 人，並且每個人都至少領了兩張公投票。根據以上資訊，可知同時領甲、乙兩案但沒有領丙案公投票者共有_________人。

【108學測】

答案：215

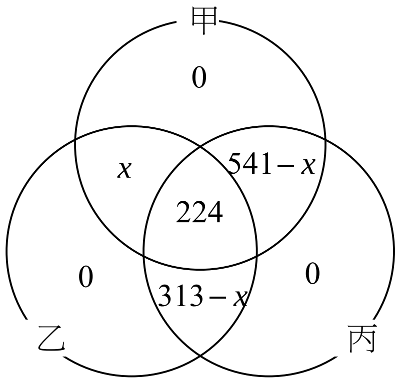
解析：∵每個人至少領了兩張公投票

∴只領甲票、只領乙票、只領丙票皆為 0 人

令同時領甲、乙兩案但沒有領丙案的有 x 人

∴同時領乙、丙兩案但沒有領甲案的有 $313-x$ 人

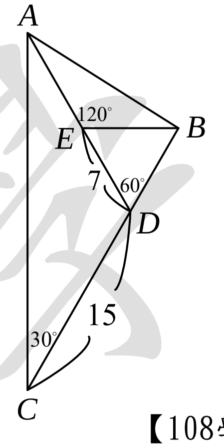
同時領甲、丙兩案但沒有領乙案的有 $541-x$ 人



丙案總人數$\Rightarrow 224+(541-x)+(313-x)=648$

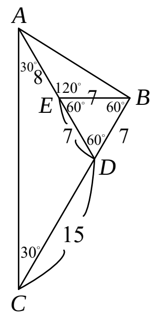
$\Rightarrow 1078-2x=648 \Rightarrow x=215$

E. 如圖（此為示意圖），在$\triangle ABC$中，$\overline{AD}$交$\overline{BC}$於D點，$\overline{BE}$交$\overline{AD}$於E點，且$\angle ACB=30^\circ$，$\angle EDB=60^\circ$，$\angle AEB=120^\circ$。若$\overline{CD}=15$，$\overline{ED}=7$，則$\overline{AB}=$________。



【108學測】

答案：13



解析：$\angle ADB=\angle ACD+\angle CAD \Rightarrow 60^\circ=30^\circ+\angle CAD \Rightarrow \angle CAD=30^\circ$

$\because \angle ACD=\angle CAD=30^\circ$，所以$\overline{CD}=\overline{AD}=15$，$\overline{AE}=8$

又$\angle BED=60^\circ, \angle EBD=60^\circ$，所以$\triangle BDE$為邊長為7正三角形

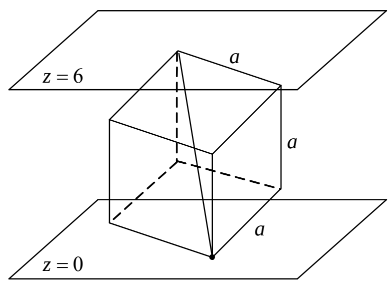
由餘弦定理$\Rightarrow \overline{AB}^2=8^2+7^2-2\times8\times7\times\cos120^\circ=169$

$\therefore \overline{AB}=13$

F. 坐標空間中，考慮有一個頂點在平面$z=0$上、且有另一個頂點在平面$z=6$上的正立方體。則滿足前述條件的正立方體之邊長最小可能值為________。（化成最簡根式）

【108學測】

答案：$2\sqrt{3}$



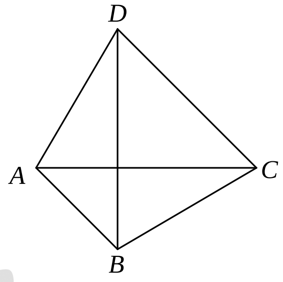
解析：$E_1: z=0$，$E_2: z=6$，$d(E_1, E_2)=6$

當正立方體最大的對角線垂直E_1, E_2時，正立方體邊長最小

令正立方體的邊長為a，則最大的對角線為$\sqrt{3}a$

$\sqrt{3}a=6 \Rightarrow a=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

G. 如圖(此為示意圖)，A, B, C, D 為平面上的四個點。已知 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}$ 、$\overrightarrow{BD}$ 兩向量等長且互相垂直，則 $\tan\angle BAD =$ ________ 。



【108學測】

答案：-3

解析：$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{DC}$ 且 $\overline{AB} : \overline{DC} = 1:2$

對角線垂直且等長 $\Rightarrow$ $ABCD$ 為等腰梯形

$\tan\angle BAD = -\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EA}} = -\dfrac{1.5}{0.5} = -3$