

# 大學入學考試中心

## 107 學年度指定科目考試數學乙試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題佔 74 分）

### 一、單選題（佔 18 分）

1. 已知實係數多項式  $f(x)$  除以  $x^2 - 14x + 13$  的餘式為  $ax + b$ ，且  $f(x)$  除以  $x - 1$  的餘式為 4，則  $a + b$  的值為何？  
 (1) -1 (2) 0 (3) 1 (4) 4 (5) 13。

【107 數乙】

答：(4)

解：  $f(x) = (x-1)(x-13)Q_1(x) + ax + b = (x-1)Q_2(x) + 4$   
 $f(1) = a + b = 4$

2. 有一配置一輛運貨車之快遞公司，要將貨品運送至 A、B、C、D、E 五個不同地點。已知這五個地點只有下列連絡道路，其所需時間如下表。例如：路線  $A \leftrightarrow B$  表示可以由 A 站到 B 站，也可以由 B 站到 A 站，行車時間皆為 1 小時。

路線	$A \leftrightarrow B$	$A \leftrightarrow C$	$A \leftrightarrow D$	$B \leftrightarrow E$	$C \leftrightarrow D$	$C \leftrightarrow E$	$D \leftrightarrow E$
行車時間	1 小時	1 小時	2 小時	5 小時	1 小時	1 小時	1 小時

今有配送任務必須從 A 站出發，最後停留在 E 站，每一站至少經過一次，且路線可以重複，試問至少要花多少小時才能完成任務？

- (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7 (5) 8。

【107 數乙】

答：(2)

解：  $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$  共 5 小時

3. 設  $a < b < 2^{10}$ ，其中  $\log a = 3$ 。已知利用  $\log a$ 、 $\log(2^{10})$  的值與內插法求得  $\log b$  的近似值為 3.0025，試問  $b$  的值最接近下列哪一個選項？（註： $\log \approx 0.3010$ ）

- (1) 1002 (2) 1006 (3) 1010 (4) 1014 (5) 1018。

【107 數乙】

答：(2)

解：  $3.0025 = 3 + 0.0025 = \log 10^3 + \log 1.006$

### 二、多選題（佔 32 分）

4. 已知數列  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$ 、 $\langle d_n \rangle$ 、 $\langle e_n \rangle$  定義如下：

$$a_n = (-1)^n ; b_n = a_n + a_{n+1} ; c_n = \left( \frac{-\sqrt{10}}{3} \right)^n ; d_n = \frac{1}{3} c_n ; e_n = \frac{1}{c_n} ;$$

其中  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。下列選項中，試選出會收斂的無窮級數：

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$  (5)  $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ 。

【107 數乙】

答：(2)(5)

解：  $\langle a_n \rangle$  發散， $\langle b_n \rangle = \langle 0 \rangle$ ， $\langle c_n \rangle$  發散， $\langle d_n \rangle$  發散， $\langle e_n \rangle$  收斂於 0

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \sum_{n=1}^{\infty} d_n \text{ 發散, } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} e_n = \frac{-\frac{3}{\sqrt{10}}}{1 + \frac{3}{\sqrt{10}}}$$

5. 設  $2^x = 3$ ,  $3^y = 4$ 。試選出正確的選項：(註： $\log_2 \approx 0.3010$ ,  $\log_3 \approx 0.4771$ )

(1)  $x < 2$  (2)  $y > \frac{3}{2}$  (3)  $x < y$  (4)  $xy = 2$  (5)  $x + y < 2\sqrt{2}$ 。

【107 數乙】

答：(1)(4)

解：  $x = \log_2 3 < \log_2 4 = 2$ ,  $y = \log_3 4 < \log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$

$$x \div \frac{0.4771}{0.3010} \div 1.58 \dots > y \div \frac{0.6020}{0.4771} \div 1.26 \dots$$

$$xy = \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 4}{\log 3} = 2, \quad x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2} \quad (\text{算幾})$$

6. 某經銷商對甲、乙兩款血壓計作品管檢驗，發現從甲款每一批中抽出一個血壓計，其誤差超過  $3 \text{ mmHg}$  (毫米汞柱) 及超過  $6 \text{ mmHg}$  的機率分別為  $0.32$  及  $0.1$ 。從乙款每一批中抽出一個血壓計，其誤差超過  $3 \text{ mmHg}$  及超過  $6 \text{ mmHg}$  的機率分別為  $0.16$  及  $0.05$ 。在甲、乙兩款的檢驗是獨立事件的情況下，試選出正確的選項：

- (1) 從甲款中抽出一個血壓計，其誤差超過  $3 \text{ mmHg}$  但不超過  $6 \text{ mmHg}$  的機率大於  $0.2$   
 (2) 若從待檢驗的甲款血壓計中連續抽兩次，每次抽一個血壓計檢驗後放回，假設這兩次的檢驗是獨立事件，其誤差依次為不超過  $3 \text{ mmHg}$  及超過  $6 \text{ mmHg}$  的機率為  $0.136$   
 (3) 從甲、乙兩款中各抽出一個血壓計，其誤差都不超過  $3 \text{ mmHg}$  的機率大於  $0.7$   
 (4) 從甲、乙兩款中各抽出一個血壓計，至少有一個誤差不超過  $3 \text{ mmHg}$  的機率大於  $0.84$   
 (5) 從甲、乙兩款中各抽出一個血壓計，兩者誤差的平均超過  $3 \text{ mmHg}$  的機率小於  $0.32 \times 0.16$ 。

【107 數乙】

答：(1)(4)

解：(1)  $0.32 - 0.1 = 0.22$

(2)  $0.68 \times 0.1 = 0.068$

(3)  $0.68 \times 0.84 = 0.5712$

(4)  $1 - 0.32 \times 0.16 = 0.9488$

(5) 明顯錯誤 (還有其他可能配組)

7. 保險公司把投保竊盜險的住宅分為  $A$ 、 $B$  兩級，其所占比率分別為  $60\%$ 、 $40\%$ 。過去一年  $A$ 、 $B$  兩級住宅遭竊的比率分別為  $15\%$ 、 $5\%$ 。據此，公司推估未來一年  $A$ 、 $B$  兩級住宅被竊的機率分別為  $0.15$ 、 $0.05$ 。今  $A$  級住宅中的  $20\%$  經過改善，重新推估這些改善過的住宅未來一年被竊的機率會降為  $0.03$ ；而其他住宅被竊機率不變。根據以上資料，試選出正確的選項：

- (1) 全體投保的住宅中，過去一年遭竊的比率為  $12\%$   
 (2) 過去一年遭竊的投保住宅中， $A$  級所占的比率超過  $90\%$   
 (3) 推估未來一年，改善過的  $A$  級住宅的被竊機率為原來的  $\frac{1}{5}$   
 (4) 經改善後，推估未來一年被竊機率，全體投保的  $A$  級住宅會小於全體投保的  $B$  級住宅  
 (5) 經改善後，推估未來一年全體投保的住宅被竊機率小於  $0.11$ 。

【107 數乙】

答：(3)(5)

- 解：(1)  $0.6 \times 0.15 + 0.4 \times 0.05 = 0.11$   
 (2)  $\frac{0.6 \times 0.15}{0.6 \times 0.15 + 0.4 \times 0.05} = \frac{9}{11} < 90\%$   
 (3)  $\frac{0.03}{0.15} = \frac{1}{5}$   
 (4)  $0.8 \times 0.15 + 0.2 \times 0.03 = 0.126 > 0.050$   
 (5)  $0.6 \times 0.126 + 0.4 \times 0.050 = 0.0956 < 0.11$

### 三、選填題 (佔 24 分)

A. 地方上張安和李平兩位角逐鄉長，結果張安得票率 55%，李平得票率 45%，由張安獲選。民調機構預測，如果下任鄉長仍由張安與李平兩人競選，鄉民相同且每一張票都是有效票，則本屆支持張安的選民將有 25% 倒向支持李平，而本屆支持李平的選民將有 10% 倒向支持張安。若描述上述現象的轉移矩陣為  $A$ ，則行列式  $\det A$  的絕對值為\_\_\_\_\_。(請化為最簡分數) 【107 數乙】

答：  $\frac{13}{20}$

解：  $\det A = \det \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{10} \end{bmatrix} = \frac{13}{20}$

B. 在坐標平面上的  $\triangle ABC$  中， $D$  為  $\overline{AB}$  的中點，且點  $E$  在射線  $\overrightarrow{AC}$  上，滿足  $\overline{AE} = 3\overline{AC}$ 。若向量內積  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 15$ ，則向量內積  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} =$ \_\_\_\_\_。 【107 數乙】

答： 90

解：  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = 15$   
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot 3\overrightarrow{AC} = 3 \times 30 = 90$

C. 有 100 元、200 元、300 元、400 元的紅包袋各一個，由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 個紅包袋，抽取後不放回。若每個紅包袋被抽取的機會都相等，則甲、乙、丙三人紅包金額總和的期望值為\_\_\_\_\_元。 【107 數乙】

答： 750

解：  $\frac{3}{4} \times (100 + 200 + 300 + 400) = 750$

### 第貳部分：非選擇題 (佔 26 分)

一. 已知實係數二次多項式函數  $y = f(x)$  滿足  $f(3) = f(-7)$ 。試回答下列問題。

(1) 寫出  $y = f(x)$  圖形的對稱軸方程式。(3 分)

(2) 若  $f(x) = a(x-k)^2 + b$ ，且  $y = f(x)$  的圖形與  $x$  軸交於相異兩點，試判斷  $ab$  乘積的值為正或負，並請說明理由。(4 分)

(3) 若方程式  $f(x) = 0$  有相異實根，試證兩根之積小於 4。(6 分)

【107 數乙】

答： (1)  $x = -2$  (2)  $ab < 0$  (3) 如詳解

解： (1)  $x = \frac{3 + (-7)}{2} = -2$

(2)  $y = a(x+2)^2 + b$  與  $x$  軸交於 2 點

$\left\{ \begin{array}{l} \text{開口向上 } a > 0, \text{ 則極小值 } b < 0 \\ \text{開口向下 } a < 0, \text{ 則極大值 } b > 0 \end{array} \right.$ , 故  $ab < 0$

(3) 兩根  $-2 + \sqrt{\frac{-b}{a}}$ 、 $-2 - \sqrt{\frac{-b}{a}}$  之積  $= 4 - \left(\frac{-b}{a}\right) = 4 + \frac{b}{a} < 4$ , 得證

二. 某車商代理進口兩廠牌汽車,

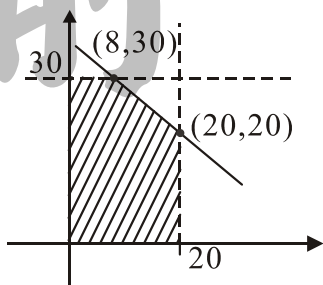
甲廠牌汽車每台成本 100 萬元, 此次進口上限 20 萬台, 售出一台淨利潤 11 萬元;  
乙廠牌汽車每台成本 120 萬元, 此次進口上限 30 萬台, 售出一台淨利潤 12 萬元。  
今車商準備 4400 萬元作為此次汽車進口成本, 且保證所進口的車輛必定全部售完。  
試回答下列問題。

- (1) 寫出此問題的線性規劃不等式及目標函數。(4 分)
- (2) 在坐標平面上畫出可行解區域, 並以斜線標示該區域。(3 分)
- (3) 試問車商此次應進口甲、乙兩廠牌汽車各多少台, 才能獲得最大利潤?  
又最大利潤是多少?(6 分)

【107 數乙】

答: 如詳解

解: 
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 30 \\ 100x + 120y \leq 4400 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



目標函數:

$11x + 12y$	$(x, y)$		$(8, 30)$		$(20, 20)$
	$11x + 12y$		448		460

甲 20 台, 乙 20 台時, 有最大利潤 460 (萬元)

寫的作業