

9. 一袋子中有編號為 $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{20}$ 的球 20 顆。若每顆球被取到的機會均等，現甲乙丙丁 4 人依序自袋中各取 5 顆球，取後不放回。試問：

(1) 甲取到的 5 顆球編號總和比乙丙丁都大的機率為何？ $\frac{1}{4}$

(2) 甲取到的 5 顆球編號總和最大，且乙取到的 5 顆球編號總和最小的機率？ $\frac{1}{12}$

(1) 甲必取到 2^{20}

$$\frac{C_4^{19} C_5^{15} C_5^{10} C_5^5}{C_5^{20} C_5^{15} C_5^{10} C_5^5} = \frac{C_4^{19}}{C_5^{20}} = \frac{1}{4}$$

(2) 同理甲先取到 2^{20}

總和	取球大小順序	大		→		小
大	甲	2^{20}				
↓	乙					
	丙					
小	丁					

分子部分如： $C_4^{19} C_1^1 C_4^{14} C_1^1 C_4^9 C_5^5$ ，解釋如下

甲先從剩下的 19 顆取 4 顆 → C_4^{19}

乙是第二大，故必取到剩下 15 顆中最大的一顆，然後再從剩下的 14 顆取 4 顆 → $C_1^1 C_4^{14}$

丙是第三大，故必取到剩下 10 顆中最大的一顆，然後再從剩下的 9 顆取 4 顆 → $C_1^1 C_4^9$

丁是最小，取完最後 5 顆 → C_5^5

同理甲最大丙第二乙第三丁最小，也是相同算法

$$\text{因此機率為 } \frac{C_4^{19} C_1^1 C_4^{14} C_1^1 C_4^9 C_5^5 \times 2}{C_5^{20} C_5^{15} C_5^{10} C_5^5} = \frac{1}{12}$$