全國高中 107 年(106 學年度)高三上
第三次學力測驗模擬考試題（106-E3）

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（佔 70 分）

一、單選題（佔 30 分）

1. 某地媽祖廟配合政府環保減香，每一位信眾持香由 8 柱香減爲 3 柱香，
祭拜後將香插入原來八個不同香爐中的三個，已知規定每個香爐至多插一柱香，
且天公爐及主爐兩個至少有一個要插香，其他的香再任意插入剩下的香爐中，
試問每一位信眾有幾種插香方法？（不考慮插香的順序）
(1) 36 種　(2) 42 種　(3) 48 種　(4) 56 種　(5) 84 種　【107 全國學測模-3】

答：(1)

解：$C_2^2C_1^6+C_1^2C_2^6=6+30=36$

2. 一曲線 $y=27^x$ 分別與兩直線 $L_1:y=162$、$L_2:y=2$ 交於 P、Q 兩點，
則直線 PQ 的斜率爲何？
(1) 40　(2) 60　(3) 90　(4) 120　(5) 160　【107 全國學測模-3】

答：(4)

解：$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{162-2}{\log_{27}162-\log_{27}2}=\dfrac{160}{\frac{4}{3}}=120$

3. 統計本校籃球隊隊長小偉近五場比賽上場時間（分鐘）與得分（分）如下：

上場時間（X）	20	26	22	30	17
得分（Y）	13	21	20	26	15

試依此選出正確的選項。
(1) 小偉這五場的平均上場時間爲 22 分鐘
(2) 小偉這五場的平均得分爲 20 分
(3) 小偉這五場上場時間的標準差小於 4 分鐘
(4) 根據這五場比賽得到 Y 對 X 的迴歸直線（最適合直線）方程式爲 $y=\frac{12}{13}x-\frac{29}{13}$
(5) 若下一場比賽教練讓小偉上場 22 分鐘，
依 Y 對 X 的迴歸直線方程式預測小偉得分爲 20 分。　【107 全國學測模-3】

答：(4)

解：

x_i	y_i	$(x_i-\overline{X})$	$(y_i-\overline{Y})$	$(x_i-\overline{X})^2$	$(y_i-\overline{Y})^2$	$(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})$
20	13	-3	-6	9	36	18
26	21	3	2	9	4	6
22	20	-1	1	1	1	-1
30	26	7	7	49	49	49
17	15	-6	-4	36	16	24
$\overline{X}=23$	$\overline{Y}=19$			104	106	96

$S_x=\sqrt{\dfrac{104}{5}}\approx 4.56\cdots$、$m=\dfrac{96}{104}=\dfrac{12}{13}$、

L：$(y-19)=\dfrac{12}{13}(x-23)\Rightarrow y=\dfrac{12}{13}x-\dfrac{29}{13}\xrightarrow{x=22}y=\dfrac{235}{13}<19$

4. 關於方程式$2x^4+3x^3-14x^2+12x-3=0$的四個根之描述，
下列選項中的敘述何者是正確的？
(1) 四個虛根　(2) 兩個實根及兩個虛根　(3) 兩個正根及兩個負根
(4) 一個正根及三個負根　(5) 三個正根及一個負根　【107 全國學測模-3】

答：(5)

解：由牛頓定理：原式$=(x-1)(2x-1)\left(x^2+3x-3\right)=0\Rightarrow x=1,\dfrac{1}{2},\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$

5. 甲、乙兩生於住家附近進行三角測量作業，測量新北大樓之頂樓高度。
甲生於地面測量點A，測得新北大樓頂樓之仰角爲$23°$；
乙生於地面測量點B，測得新北大樓頂樓之仰角爲$25°$。
查閱地圖發現，地圖上測量點A、B、新北大樓恰好成一直線，
且A、B在大樓之異側及A和B之直線距離爲 1000 公尺。
請利用下表判斷，新北大樓之頂樓高度約爲幾公尺？

角度	sin	cos	tan		
23°00′	.3907	.9205	.4245	2.356	67°00′
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
25°00′	.4226	.9063	.4663	2.145	65°00′
	cos	sin		tan	角度

(1) 210 公尺　(2) 220 公尺　(3) 230 公尺　(4) 240 公尺　(5) 250 公尺
【107 全國學測模-3】

答：(2)

解：$h\cot 23°+h\cot 25°=1000\Rightarrow h=\dfrac{1000}{\tan 67°+\tan 63°}\approx\dfrac{1000}{2.356+2.145}\approx 222.17\cdots$

6. 若$\begin{cases}\cos\alpha+\sin\beta=1\\ \sin\alpha+\cos\beta=\sqrt{2}\end{cases}$，則$\cos(2\alpha+2\beta)$之值爲何？
(1) -1　(2) 0　(3) 1　(4) $\dfrac{1}{2}$　(5) $-\dfrac{1}{2}$　【107 全國學測模-3】

答：(4)

解：$1+2\sin(\alpha+\beta)+1=3\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\cos 2(\alpha+\beta)=1-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

二、多選題（佔 40 分）

7. 設$f(x)$爲次數不超過四次的實係數多項式，且$f(x)<0$的整數解共有 7 個。
請選出正確的選項。
(1) $f(x)$的次數爲奇數
(2) $f(x)$的最高次項係數爲正
(3) $f(x)<0$的 7 個整數解必爲連續整數
(4) $f(x)\le 1$的整數解至少有 7 個
(5) $f(x)>1$存在小於 100 的解
【107 全國學測模-3】

$\boxed{答}$：(2)(4)(5)

$\boxed{解}$：$f(x)<0$ 的整數解共有 7 個（有限多個），故(1)必爲偶數次方　(3)不一定

8. 變數 X 、Y 、Z 的 n 筆資料分別爲 x_i 、y_i 、z_i ，$i=1,2,\cdots\cdots,n$ ，
其中 X 和 Y 、X 和 Z 的相關係數分別爲 r_{XY} 、r_{XZ} 。請選出正確的選項。
(1) 若 $z_i=\frac{1}{2}y_i$ ，則 $r_{XZ}=\frac{1}{2}r_{XY}$
(2) 若 $z_i=-y_i+1$ ，則 $r_{XZ}=-r_{XY}$
(3) 若 X 、Y 的算術平均數皆爲 0，則 Y 對 X 的迴歸直線方程式爲 $y=r_{XY}x$
(4) 今有另一變數 W 滿足 $w_i=y_i+z_i$ ，則 X 和 W 的相關係數 $r_{XW}=r_{XY}+r_{XZ}$
(5) 承(4)，若 X 和 Y 、X 和 Z 均爲正相關，則 X 和 W 亦爲正相關　【107 全國學測模-3】

$\boxed{答}$：(2)(5)

$\boxed{解}$：(1)應爲 $r_{XZ}=r_{XY}$　(2)(5)正確　(3)(4)無此規則

9. 設 $\Gamma: x^2+y^2-10x-2y-25=0$ 爲座標平面上的圓。請選出正確的選項。
(1) Γ 的圓心座標爲 $(5,1)$
(2) Γ 上的點與直線 $L: x-y-4=0$ 的最遠距離等於 5
(3) 直線 $L_1: x-y+1=0$ 與 Γ 相切
(4) Γ 上恰有兩個點與直線 $L_2: x-y+4=0$ 的距離等於 2
(5) Γ 與直線 $L_3: x-y-2=0$ 所截的弦長等於 14　【107 全國學測模-3】

$\boxed{答}$：(1)(4)(5)

$\boxed{解}$：$\Gamma:(x-5)^2+(y-1)^2=51$　(2) L 過圓心，故爲 0　(3)應爲割線

10. 已知 13^{1000} 爲 1114 位數，試問下列哪些選項的敘述是正確的？
（說明：123456 的最高位數字是 1；45678 的最高位數字是 4）
(1) $\log 13^{50}$ 的首數是 55　(2) $\log 13^{50}$ 的尾數大於 0.5　(3) 13^{20} 是 22 位數
(4) 13^{20} 的最高位數字是 1　(5) 13^{20} 的個位數字是 9　【107 全國學測模-3】

$\boxed{答}$：(1)(2)(4)

$\boxed{解}$：$1113\le\log 13^{1000}<1114\Rightarrow\begin{cases}55.65\le\log 13^{50}<55.70\\22.26\le\log 13^{20}<22.28\end{cases}$ ，$R_{10}\left(13^{20}\right)=R_{10}\left(3^{20}\right)=1$

11. 關於數列 $\langle a_n\rangle$ ，下列敘述哪些正確？
(1) 若對所有正整數 n ，$a_n a_{n+2}=a_{n+1}^{\;2}$ 均成立，則 $\langle a_n\rangle$ 爲等比數列
(2) 若對所有正整數 n ，$a_{2n-1}+a_{2n+1}=2a_{2n}$ 均成立，則 $\langle a_n\rangle$ 爲等差數列
(3) 若 $\langle a_n\rangle$ 爲等比數列，則 $\left\langle\frac{1}{a_n}\right\rangle$ 亦爲等比數列
(4) 若 $\langle a_n\rangle$ 爲等差數列，且對所有的正整數 k ，級數 $S_k=\sum_{n=1}^{k}a_n$ 均爲正數，
則 $a_{n+1}\ge a_n$ 。

(5) 級數 $S_k=\sum_{n=1}^{k}a_n$ ，若 $\langle S_k\rangle$ 爲等差數列，則 $\langle a_n\rangle$ 爲等差數列　【107 全國學測模-3】

$\boxed{答}$：(3)(4)

$\boxed{解}$：(1)必須 $\langle a_n\rangle$ 不含 0 才成立　(2)必須 $a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n$ 才成立　(5)無此規則

12.設 O 爲 ΔABC 所在平面上一點，下列哪個式子可以確定 P 點的位置落在 ΔABC 內部？

(1) $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

(3) $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

(4) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$

(5) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$　【107 全國學測模-3】

$\boxed{答}$：(1)(4)

$\boxed{解}$：(1)(2)(3)由線性組合得知，僅(1)對

(4) $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ ，正確

(5) $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ ，不確定

13.數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=2$ 且 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$ ，n 爲正整數。請選出正確的選項。

(1) $a_2=\frac{8}{3}$

(2) $a_3<3$

(3) $a_n=3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(4) $a_n=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(5) $a_{10}<a_{11}$　【107 全國學測模-3】

$\boxed{答}$：(1)(2)(3)(5)

$\boxed{解}$：$\left(a_{n+1}-3\right)=\frac{1}{3}\left(a_n-3\right)\Rightarrow\left(a_n-3\right)=\frac{1}{3^{n-1}}\left(a_1-3\right)\xrightarrow{a_1=2}a_n=3-\frac{1}{3^{n-1}}$

$a_2=\frac{8}{3}$ 、 $a_3=\frac{26}{9}$ 、…、 $a_{10}<a_{11}$

14.爲獎勵學生本學期優良表現，期末班會時老師提供 5 份禮品，由 40 位學生抽獎。
在 40 支籤中有 5 支中獎籤，今甲、乙、丙三人先依序上台抽獎
（每支籤被抽出的機會均等），每次取一支，取後不放回，則下列敘述哪些正確？

(1) 甲抽到中獎籤之機率爲 $\frac{1}{8}$

(2) 乙抽到中獎籤之機率爲 $\frac{5}{39}$

(3) 甲、乙、丙三人恰有 1 人抽到中獎籤之機率爲 $\frac{3}{8}$

(4) 在甲抽到中獎籤的條件下，丙抽到中獎籤之機率爲 $\frac{4}{39}$

(5) 在丙抽到中獎籤的條件下，甲抽到中獎籤之機率爲 $\frac{4}{39}$　【107 全國學測模-3】

$\boxed{答}$： (1)(4)(5)

$\boxed{解}$：(1)(2)機率均爲 $\frac{1}{8}$　(3)機率爲 $\frac{5\times35\times34\times(3)}{40\times39\times38}=\frac{595}{1976}$　(4)(5)機率均爲 $\frac{\frac{1}{8}\left(\frac{4}{39}\right)}{\frac{1}{8}}=\frac{4}{39}$

第貳部分：選填題（佔 30 分）

1. 若 $\begin{cases}|x-2|\le 3\\|x+1|\ge 2\end{cases}$ 與 $|x-a|\le b$ 表同一範圍，則數對 $(a,b)=$________。　【107 全國學測模-3】

$\boxed{答}$：$(3,2)$

$\boxed{解}$：$\begin{cases}|x-2|\le 3\Rightarrow -1\le x\le 5\\|x+1|\ge 2\Rightarrow x\ge 1 \text{或} x\le -3\end{cases}\xrightarrow{\text{取交集}}1\le x\le 5\Rightarrow|x-3|\le 2$

2. 已知 2，$\sqrt{14+6\sqrt{5}}$，$\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ 爲三次實係數方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三個根，則序組 $(a,b,c)=$________。　【107 全國學測模-3】

$\boxed{答}$：$(a,b,c)=(-8,16,-8)$

$\boxed{解}$：$\sqrt{14\pm6\sqrt{5}}=\sqrt{14\pm2\sqrt{45}}=3\pm\sqrt{5}$

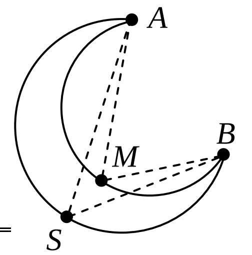
$x^3+ax^2+bx+c=(x-2)\left(x-3-\sqrt{5}\right)\left(x-3+\sqrt{5}\right)=x^3-8x^2+16x-8$

3. 今有日蝕如右圖。假設圖上之曲線皆爲圓弧，

若 $\angle ASB=\frac{\pi}{4}$，$\angle AMB=\frac{\pi}{3}$，

則兩弧 $\overset{\frown}{ASB}$、$\overset{\frown}{AMB}$ 弧長之比值爲________。（化爲最簡根式）

【107 全國學測模-3】



$\boxed{答}$：$\frac{9\sqrt{6}}{16}$

$\boxed{解}$：$\frac{\overline{AB}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R_{小}$、$\frac{\overline{AB}}{\sin\frac{\pi}{4}}=2R_{大}$，$\frac{R_{大}}{R_{小}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，故 $\frac{弧長_{大}}{弧長_{小}}=\frac{\sqrt{3}\left(2\pi-\frac{2\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left(2\pi-\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{9\sqrt{6}}{16}$

4. 座標平面上，定點 $A(-2,3)$、$B(-1,1)$，若 P 爲圓 $C:x^2+y^2=1$ 上的動點，則 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的最大值爲________。　【107 全國學測模-3】

$\boxed{答}$：11

$\boxed{解}$：$P(x,y)\in C$：$x^2+y^2=1$，且 $\overrightarrow{PA}=(x+2,y-3)$、$\overrightarrow{PB}=(x+1,y-1)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=x^2+y^2+3x-4y+5=\underbrace{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2}_{\text{可視爲以}\left(-\frac{3}{2},2\right)\text{爲圓心的一群同心圓}}-\frac{5}{4}$

所求最大值 $=\left[d\left(\left(-\frac{3}{2},2\right),(0,0)\right)+1\right]^2-\frac{5}{4}=\left[\frac{5}{2}+1\right]^2-\frac{5}{4}=11$

5. 一線性規劃問題的可行解區域爲座標平面上由點 $A(0,40)$、$B(27,36)$、$C(30,0)$、$D(3,4)$所圍成的平行四邊形及其內部。已知目標函數 $ax+by$（其中 a、b 爲常數）在 D 點有最小值 11，則此目標函數在同一個可行解區域的最大值爲________。【107 全國學測模-3】

答：99

解：$Min=3a+4b=11$、$Max=27a+36b=9[3a+4b]=9\times[11]=99$

6. 小明發明了一個數線跳棋遊戲，首先將棋子放在原點，然後依序寫出 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{10}$ 等 10 個相異的整數，接著計算 a_2-a_1 的值，並依照計算出來的值移動棋子（例如"$+3$"就往右移動 3 單位，"-2"就往左移動 2 單位）。接下來計算 a_3-a_2 的值並移動棋子，依序計算並移動 $a_{n+1}-a_n$ 的值，直到移動完 $a_{10}-a_9$ 的值爲止。
已知小明隨意將 1～10 的 10 個整數填入 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{10}$，整個遊戲移動過程中只有轉向一次，最後停在數線上標示爲"1"的位置，請問小明將 1～10 的 10 個整數填入 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{10}$ 的方法有________種。
（例如：$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{10}$，依序爲 $1,3,4,5,10,9,8,7,6,2$，其移動過程爲 $+2,+1,+1,+5,-1,-1,-1,-1,-4$，只轉向一次，最後停在"1"的位置）
【107 全國學測模-3】

答：256

解：整個遊戲移動過程中只有轉向一次，且最後停在數線上標示爲"1"的位置，
故必「以 10 爲界，兩側由 1 先遞增再遞減到 2」，剩餘的 7 數排入法有 $2^7=128$ 種
或是「以 1 爲界，兩側由 9 先遞減再遞增到 10」，剩餘的 7 數排入法有 $2^7=128$ 種
合計 $=128\times2=256$