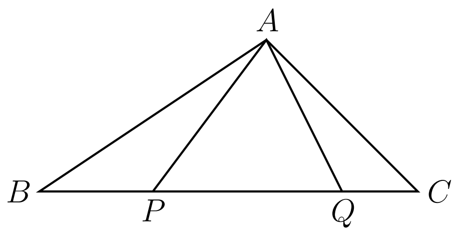
107 年台中女中

一、填充題 (I)

1. $\triangle ABC$ 中，A 坐標為 $(-2,5)$，$\angle B$ 與 $\angle C$ 的內角平分線方程式分別為 $L: 2x-3y+4=0$ 與 $M: x+2y+2=0$，則 C 點的坐標為 ___$(2,-2)$___。

2. 設 a、b、c、d 成等差數列，且實數 x，y，z，u 滿足 $\begin{cases} a+b+c+d=60 \\ x+y+z+u=12 \\ az+bu+cx+dy=168 \end{cases}$，則 $ay+bx+cu+dz=$ ___192___。

3. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，P、Q 在 $\overline{BC}$ 上，$\overline{BP}=12$，$\overline{PQ}=15$，$\overline{CQ}=9$，$\angle BAP=\angle CAQ$，$\overline{AC}=20$，則 $\overline{AB}=$ ___$10\sqrt{6}$___。



4. 設國文考科分成兩部分，一部分是測驗成績、另一部分是寫作成績。某校某次國文測驗成績平均為 62 分，標準差為 15 分；寫作成績平均為 18 分，標準差為 5 分。測驗成績與寫作成績的相關係數為 0.6，國文考科的總成績為測驗成績與寫作成績之和，則總成績的標準差為 ___$\sqrt{340}$___ 分。

5. 對所有滿足 $a>b>c>d>0$ 的實數 a,b,c,d，欲使 $\log_{\frac{a}{b}}2018+\log_{\frac{b}{c}}2018+\log_{\frac{c}{d}}2018 \geq k\cdot\log_{\frac{a}{d}}2018$ 恆成立，則 k 的最大值為 ___9___。

6. 設 O 為拋物線 $y=4x^2$ 的頂點，若拋物線上異於 O 的兩動點 A、B 滿足 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$，則 $\overline{AB}$ 中點 P 的軌跡方程式為 ___$32x^2-4y=-1$___。

7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}\right)^3}\right)$ 之值為 ___$\frac{16}{27}$___。

8. 設兩複數 $\alpha,\ \beta$ 滿足 $\alpha^2-3\alpha\beta+9\beta^2=0$，且 α 滿足 $|\alpha|=3$，則 $|\alpha+\beta|=$ ___$\sqrt{13}$___。

9. 將菱形 $ABCD$ 的紙張沿 $\overline{BD}$ 將 $\triangle BCD$ 往上摺，直到 C 點的投影 P 點正好落在 $\triangle ABD$ 的重心上，設此時平面 ABC 與平面 ABD 之兩面角為銳角 θ，若 $\overline{AC}=12$，$\overline{BD}=6$，則 $\tan\theta$ 的值為 ___$\sqrt{10}$___。

10. 已知 $y=2^{k\sin^2 x}$ 與 $y=4\sqrt{3}\csc x$ 在 $-\pi\leq x\leq\pi$ 的範圍內交於 A，B 兩點，若 $\overline{AB}=\frac{\pi}{3}$，則實數 k 之值為 ___4___。

11. 某公司尾牙舉辦「四四如意・百倍奉還」抽獎活動，其規則如下：
「在一個不透明的箱中放入標有連號 1、2、3、⋯、106 之號碼球各 1 顆（共 106 顆），抽獎者由箱中一次抽出 4 顆號碼球，其中最大號碼的 100 倍即為該抽獎者所得之獎金」，則抽獎者所得獎金的期望值為 ＿8560＿。

二、填充題 (II)

12. 兩相異平行直線 L_1，L_2 皆為曲線 $C: y=x^3$ 之切線，分別過兩切點作 L_1，L_2 的法線 M_1，M_2，若四條直線 M_1，M_2，L_1，L_2 所圍成的四邊形面積為 $\frac{60}{7}$，則直線 L_1 之斜率為 ＿$3\sqrt{3}$＿。

13. 圓 $C: x^2+y^2=25$ 上有兩點 $A(3,4)$、$B(-5,0)$，有一拋物線 Γ 同時切圓 $C: x^2+y^2=25$ 於 A、B 兩點，則拋物線 Γ 之焦點坐標為 ＿$\left(-\frac{5}{2},5\right)$＿。

14. 方程式 $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$ 之正實數解 $x=$ ＿$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$＿。

15. 設 $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{4\cos x+5}}$，其中 $x\in\mathbb{R}$，已知 $f(x)$ 的值域為區間 $[a,b]$，則數對 $(a,b)=$ ＿$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$＿。

16. 設 a、b 為實數，且方程式 $x^3+ax^2+bx=8$ 有三個正根，則 $b-2a$ 的最小值為 ＿24＿。

三、計算與證明題

1. 設 a、b 為兩質數，且 $p=a^b+b^a$ 也為一質數，試求所有解 (a,b)，並請詳述理由。
＿$(2,3)$ 或 $(3,2)$＿

2. 設 a,b,c 皆為正實數，試證：$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}\le\frac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}$

107 年台中女中詳解

$\boxed{1.}$

由角平分線的特性，知 A 對兩條角平分線的對稱點，均會在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上面

$\Rightarrow A$ 對 L 的對稱點 $A'(\frac{34}{13},\frac{-25}{13})$；$A$ 對 M 的對稱點 $A''(-6,-3)$

得 $\overleftrightarrow{BC}$ 方程式為 $x-8y=18$

$\Rightarrow \begin{cases} x+2y=-2 \\ x-8y=18 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(2,-2)$

$\boxed{2.}$

因為 a，b，c，d 成等差數列，可設 $a=p-3k$，$b=p-k$，$c=p+k$，$d=p+3k$

$a+b+c+d=60 \Rightarrow (p-3k)+(p-k)+(p+k)+(p+3k)=60 \Rightarrow p=15$

$$\begin{aligned} az+bu+cx+dy &= (15-3k)z+(15-k)u+(15+k)x+(15+3k)y \\ &= 15(x+y+z+u)+k(x+3y-3z-u) \\ &= 15\times 12+k(x+3y-3z-u) \\ &= 180+k(x+3y-3z-u) \end{aligned}$$

$\Rightarrow k(x+3y-3z-u)=-12$

所求 $$\begin{aligned} ay+bx+cu+dz &= (15-3k)y+(15-k)x+(15+k)u+(15+3k)z \\ &= 15(x+y+z+u)-k(x+3y-3z-u) \\ &= 15\times 12+12 \\ &= 192 \end{aligned}$$

$\boxed{3.}$

由面積關係得 $\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AP}}{\overline{AC}\cdot\overline{AQ}}=\dfrac{12}{9}$，$\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AQ}}{\overline{AC}\cdot\overline{AP}}=\dfrac{12+15}{15+9}=\dfrac{27}{24}$

$\overline{AC}=20$ 代入並將兩式相乘即得 $\overline{AB}=10\sqrt{6}$

$\boxed{4.}$

設測驗成績為 a_i，寫作成績為 b_i，總成績 $T_i=a_i+b_i$

所求為 $\sigma_T=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}T_i^2-\mu_T^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2-\mu_T^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i^2+2a_ib_i+b_i^2)-\mu_T^2}$

可知必須求出 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$，$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$，$\mu_T$

$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=n\cdot(\sigma_a^2+\mu_a^2)=(3844+225)n=4069n$

$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2=n\cdot(\sigma_b^2+\mu_b^2)=(324+25)n=349n$

$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=n\cdot(r\sigma_a\sigma_b+\mu_a\mu_b)=n(0.6\times 15\times 5+62\times 18)=1161n$

$\mu_T=\mu_a+\mu_b=62+18=80$

因此所求為 $\sqrt{\frac{1}{n}\cdot(4069n+349n+1161n)-80^2}=\sqrt{340}$

$\boxed{5.}$

令 $x=\log_{2018}\dfrac{a}{b}$，$y=\log_{2018}\dfrac{b}{c}$，$z=\log_{2018}\dfrac{c}{d}$，$u=\log_{2018}\dfrac{d}{a}$

得 $x+y+z+u=0$

題目轉變為 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq k\cdot\left(\dfrac{-1}{u}\right)$

由柯西不等式得

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)&\geq\frac{(1+1+1)^2}{x+y+z}\\&=9\cdot\left(\frac{-1}{u}\right)\end{aligned}$$

得 $k=9$

$\boxed{6.}$

令 $A(t_1,4t_1^2)$，$B(t_2,4t_2^2)$

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

得 $t_1t_2=\dfrac{-1}{16}$

$\overline{AB}$ 中點 P 為 $\begin{cases}x=\dfrac{t_1+t_2}{2}\\ y=\dfrac{4t_1^2+4t_2^2}{2}\end{cases}$

$y=2(t_1^2+t_2^2)=2\left[(2x)^2+\dfrac{1}{8}\right]=8x^2+\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow 32x^2-4y=-1$

$\boxed{7.}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}\right)^3}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right]}{\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{n}{n}}\right)\right]^3}\\&=\frac{\displaystyle\int_0 1x^3dx}{\left(\displaystyle\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}dx\right)^3}\\&=\frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^3}\\&=\frac{16}{27}\end{aligned}$$

$\boxed{8.}$

依題意得 $9\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2-3\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)+1=0$

$\Rightarrow \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{6}$

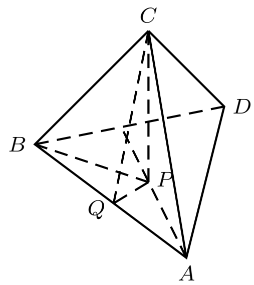
所求為 $|\alpha+\beta| = |\alpha|\left|1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right|$

$$= 3\left|1+\frac{1\pm\sqrt{3}i}{6}\right|$$

$$= 3\sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$$= \sqrt{13}$$

$\boxed{9.}$



由題意可算出此菱形的邊長為 $\sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45}$

設 P 到 $\overline{AB}$ 的垂足為 Q，則所求即為 $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PQ}}$

因為 P 為 $\triangle ABD$ 的重心，所以 P 到 $\overline{BD}$ 的距離為 2

$\overline{CP} = \sqrt{6^2-2^2} = \sqrt{32}$

$\triangle ABD =$ 菱形面積的一半 $= \dfrac{6\times 6}{2} = 18 \Rightarrow \triangle APB = 6$

$\sqrt{45}\times\overline{PQ}\times\dfrac{1}{2} = 6 \Rightarrow \overline{PQ} = \dfrac{12}{\sqrt{45}}$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{PQ}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{12}{\sqrt{45}}} = \sqrt{10}$

$\boxed{10.}$

因為 $y = 2^{k\sin^2 x}$ 與 $y = 4\sqrt{3}\csc x$ 的圖形均對稱於 $x = \dfrac{\pi}{2}$，所以 $\overline{AB}$ 為水平線

A 的 x 坐標為 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

將 $x = \dfrac{\pi}{3}$ 代入得 $2^{k\sin^2\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{3}\csc\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow k = 4$

$\boxed{11.}$

依題意可寫出機率分佈

X	4	5	6	$\cdots$	106
P_X	$\frac{C^3_3}{C^{106}_4}$	$\frac{C^4_3}{C^{106}_4}$	$\frac{C^5_3}{C^{106}_4}$	$\cdots$	$\frac{C^{105}_3}{C^{106}_4}$

$E(X) = 100\times\dfrac{1}{C^{106}_4}\cdot(4\cdot C^3_3+5\cdot C^4_3+6\cdot C^5_3+\cdots+106\cdot C^{105}_3)$

$$= \frac{100}{C^{106}_4}\cdot\sum_{k=3}^{105}(k+1)\cdot C^k_3$$

$$= \frac{100}{C^{106}_4}\cdot\sum_{k=3}^{105}4\cdot C^{k+1}_4$$

$$= \frac{400}{C_4^{106}} \cdot C_5^{107}$$
$$= 8560$$

$\boxed{12.}$

因為切線 $L_1//L_2$，法線 $M_1//M_2$，且切線與法線垂直，得知所求四邊形為矩形

設 L_1 的切點為 $A(t,t^3)$，由三次函數的對稱性可知，L_2 的切點 $B(-t,-t^3)$ 且不失一般性，可假設 $t>0$

$y'=3x^2$，可得到切線與法線的方程式為

$$\begin{cases} L_1 : 3t^2x - y = 2t^3 \\ L_2 : 3t^2x - y = -2t^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} M_1 : x + 3t^2y = 3t^5 + t \\ M_2 : x + 3t^2y = -3t^5 - t \end{cases}$$

$d(L_1,L_2) = \dfrac{4t^3}{\sqrt{1+9t^4}}$，$d(M_1,M_2) = \dfrac{6t^5+2t}{\sqrt{1+9t^4}}$

$\Rightarrow \dfrac{4t^3}{\sqrt{1+9t^4}} \times \dfrac{6t^5+2t}{\sqrt{1+9t^4}} = \dfrac{60}{7}$

$\Rightarrow t^4 = 3$

$\therefore 3t^2 = 2\sqrt{3}$

$\boxed{13.}$

拋物線的對稱軸必過圓心 $(0,0)$ 與 $\overline{AB}$ 的中點 $(-1,2)$，得對稱軸方程式 $2x+y=0$

由拋物線的光學性質，知反射光斜率為 -2

另一方面，因為 $(-5,0)$ 的切線為鉛垂縣，所以入射光斜率為 2，得入射光方程式 $2x-y=-10$

焦點即為方程組 $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x-y=-10 \end{cases}$ 的解 $(-\dfrac{5}{2},5)$

$\boxed{\text{註}}$：

拋物線的光學性質：從焦點射出的光，碰到拋物線後，反射光會平行對稱軸

$\boxed{14.}$

令 $x=\cos\theta$，則原式變為 $\sqrt{1-\cos\theta} = 2\cos^2\theta - 1 + 2\cos\theta\sin\theta$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\dfrac{\theta}{2} = \cos 2\theta + \sin 2\theta$

$\Rightarrow \sin\dfrac{\theta}{2} = \sin(2\theta + 45^\circ)$

$\Rightarrow \dfrac{\theta}{2} = 2\theta + 45^\circ$ 或 $\dfrac{\theta}{2} + (2\theta + 45^\circ) = 180^\circ$

$\Rightarrow \theta = -30^\circ$（不合）或 54°

$\therefore x = \cos 54^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$\boxed{15.}$

$y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{4\cos x + 5}} \Rightarrow y^2 = \dfrac{\sin^2 x}{4\cos x + 5} = \dfrac{1-\cos^2 x}{4\cos x + 5}$

$\Rightarrow \cos^2 x + 4y^2 \cos x + (5y^2 - 1) = 0$ 此方程式有介於 -1 與 1 之間的實根

$\Rightarrow (4y^2)^2 - 4 \cdot (5y^2 - 1) \geq 0$

$\Rightarrow (4y^2 - 1)(y^2 - 1) \geq 0$

$\Rightarrow (2y - 1)(2y + 1)(y - 1)(y + 1) \geq 0$

$\Rightarrow y \leq -1$（不合），$-\dfrac{1}{2} \leq y \leq 2$，$y \geq 1$（不合）

$\therefore (a, b) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

$\boxed{16.}$

令方程式 $x^3 + ax^2 + bx = 8$ 的三根為 α，β，γ，

由根與係數的關係得 $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b \\ \alpha\beta\gamma = 8 \end{cases}$

則 $$\begin{aligned} b - 2a &= \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 2(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= \frac{8}{\gamma} + \frac{8}{\alpha} + \frac{8}{\beta} + 2(\alpha + \beta + \gamma) \\ &\geq 8 \times 3 \\ &= 24 \end{aligned}$$

$\boxed{1.}$

若 a，b 均為奇質數，則 p 為偶數，不合題意，可知 a 與 b 必為一奇一偶

不失一般性。可假設 $a = 2$，則 $p = 2^b + b^2$

當 $b = 3$，$p = 2^3 + 3^2 = 17$ 符合題意

當 $b \neq 3$，則必為 $3k + 1$ 或 $3k + 2$ 的形式

若 $b = 3k + 1$，$p \equiv 2^{3k+1} + (3k + 1)^2 \pmod 3 \equiv 1 - 1 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$ 不為質數

若 $b = 3k + 2$，$p \equiv 2^{3k+2} + (3k + 2)^2 \pmod 3 \equiv -1 + 1 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$ 不為質數

即 b 若為大於 3 的質數，則 p 必為 3 的倍數

因此 (a, b) 的所有解為 $(2, 3)$ 及 $(3, 2)$

$\boxed{2.}$

由算幾不等式，

$$\frac{\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}}{2} \geq \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}, \quad \frac{\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a}}{2} \geq \sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}}, \quad \frac{\frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b}}{2} \geq \sqrt{\frac{ca}{(c+b)(a+b)}}$$

將三式相加得

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &\geq \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} + \sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}} + \sqrt{\frac{ca}{(c+b)(a+b)}} \\ &= \frac{\sqrt{ab(a+b)} + \sqrt{bc(b+c)} + \sqrt{ca(c+a)}}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} \end{aligned}$$

將分母乘至左邊，即得證