從兩道絕妙好題看學生的解題迷思概念

李祐宗
澎湖縣立湖西國民中學

壹、前言

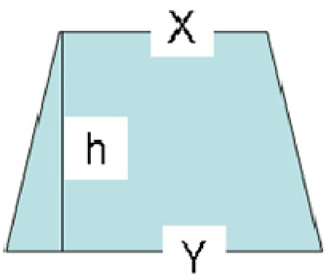
學生學習數學的過程往往會出現容易發生錯誤的地方，特別的是有些題目的設計往往容易讓學生產生錯誤的解題方向導致產生錯誤的解答，而在有些情況下學生被告知解題方向錯誤時仍難以知道自己錯誤的地方在哪。筆者就自身的教學經驗提供兩則題目，這些題目都因學生集體性的誤判求解方向而產生錯誤以致讓筆者印象深刻，故藉此提供筆者的教學經驗並釐清學生的迷思概念。

貳、例一：圓錐台的體積

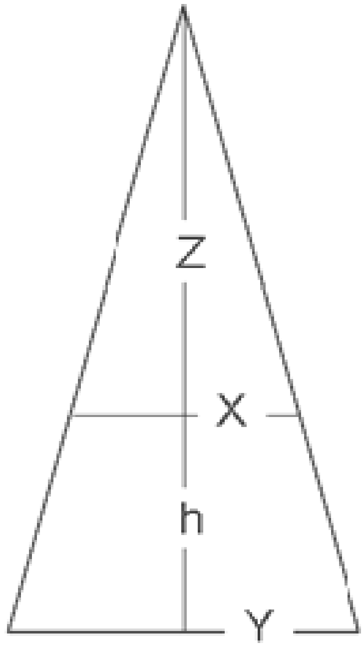
筆者曾在課堂上教到體積單元時，曾經拿了這樣的漱口杯如圖一（以下筆者簡稱為圓錐台）問同學該怎麼算它的體積時，有位同學馬上就回答:『上底面積』加『下底面積』之後，乘以高再除以二。當下我腦海中的反應是：這位同學，你怎麼可以把梯形『面積』公式直接套到這樣的『體積』來算呢？不過且慢，或許學生不經意的回答可以成為問題的焦點所在。

通常要學生證明自己的看法無誤是困難的，可能因為他們的代數基礎能力不足或者給予思考的時間不夠長所致。不過教師在學生思考一段時間後，學生仍不得其解時，可拋出以下面積與體積分別對圓錐台高度的變化關係圖，並讓學生比較有何不同。其實犯了上述錯誤的學生主要在於以『面積』的二維觀念直接套用到『體積』的三維空間而產生錯誤，所以出現了錯誤迷思概念，此時學生也較能理解何以犯下這樣的錯誤。

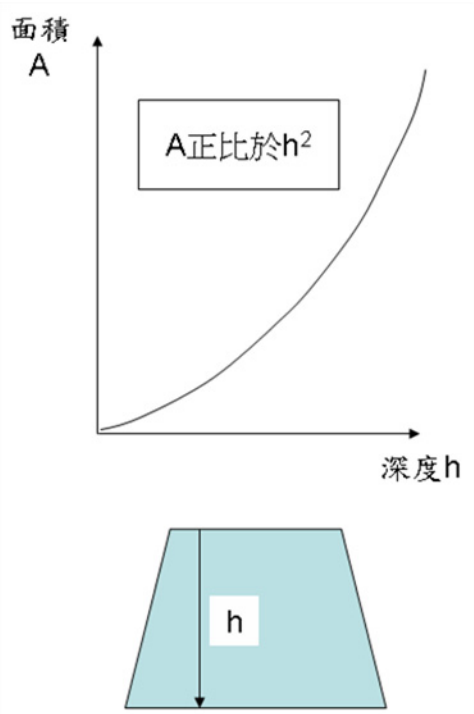
圖一、漱口杯



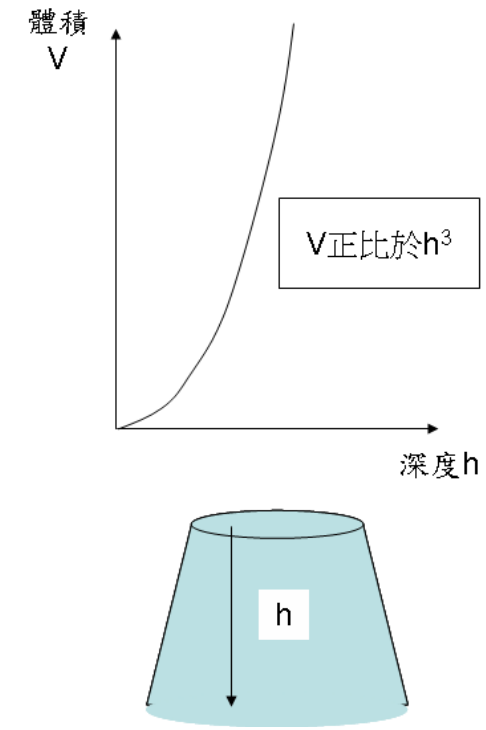
圖二、圓錐台



圖三、圓錐台變圓錐



圖四



圖五

接下來我們將證明學生認知錯誤的圓錐台體積公式【(上底面積＋下底面積)×高÷2】是錯誤的。學生認知錯誤的體積公式$=(\frac{x^2\pi}{4}+\frac{y^2\pi}{4})\times h\div 2=\frac{h\pi}{8}(x^2+y^2)$，而實際的圓錐台體積算法應如下：

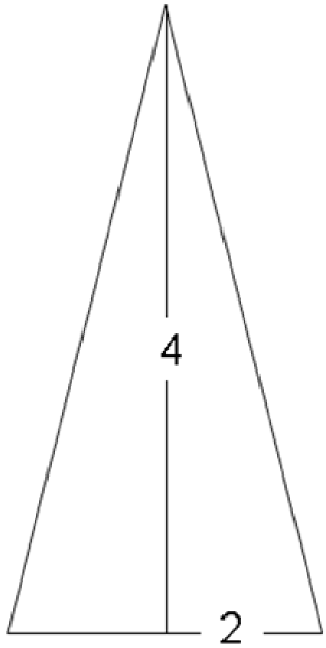
假設圓錐台的上底為 x 、下底為 y 、高為 h（如圖三），則可以列出比例式 $x：y=z：(z+h)\rightarrow z=\frac{x}{y-x}h$，$z+h=\frac{x}{y-x}h+h=\frac{y}{y-x}h$。所以圓錐台的體積等於圖的體積減去其上半部的圓錐體積$=\frac{y^2\pi}{12}(\frac{y}{y-x})h-\frac{x^2\pi}{12}(\frac{x}{y-x})h=$

$\frac{h\pi}{12(y-x)}(y^3-x^3)=\frac{h\pi}{12}(x^2+xy+y^2)$，但是 $\frac{h\pi}{8}(x^2+y^2)\neq\frac{h\pi}{12}(x^2+xy+y^2)$，證畢。若此時學生並不知道此公式是錯誤的，他繼續代入漱口杯的實際數字將會發現此體積 $=\frac{3.5\pi}{8}(3^2+4^2)\fallingdotseq 34.3611696$，非常接近實際值！如果事後教師不告知學生或者學生也沒發現這公式是錯誤的話，學生很有可能以後會繼續用此公式來計算類似的圓錐台體積。

所以以【(上底面積＋下底面積)×高÷2】這樣的公式來計算圓錐台體積是錯誤的。但是這兩者有沒有相等的時候？我們令 $\frac{h\pi}{8}(x^2+y^2)=\frac{h\pi}{12}(x^2+xy+y^2)$ → $x=y$，也就是說，當圓錐台的 x(上底) $=y$(下底)時，也就是直圓柱時，體積可以這樣計算，非直圓柱則不行。

一、錯誤迷思的另一方向思考

若學生代數方面不佳，無法用上述的方式來理解【(上底面積＋下底面積)×高÷2】這樣的公式是錯誤的話，可以提供另一方式，也就是將問題作特殊化來討論。怎說？先將此圓錐台(漱口杯)拉直變成直圓錐(上底的長度退化成零)，再將各項數字設為簡單的數字(假設此圓錐下底為2，高為4)。因此，此直圓錐的體積為 $\frac{4}{3}\pi$；而用【(上底面積＋下底面積)×高÷2】算出來的體積為 $2\pi\neq\frac{4}{3}\pi$。由特殊化的例子可初步判斷此公式的正確與否有待質疑。



圖六、圓錐

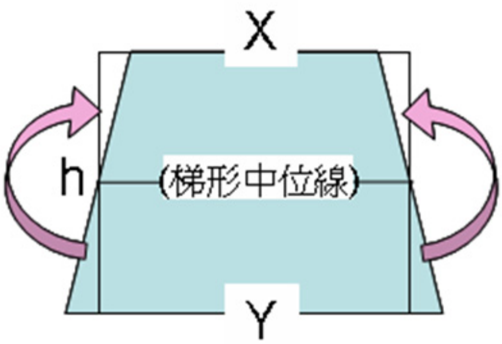
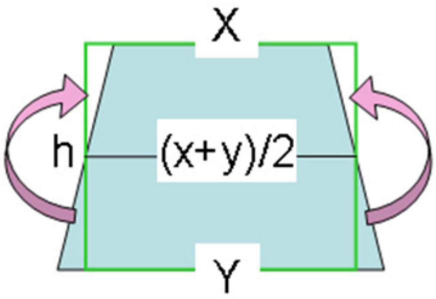


圖 7、圓錐台側面

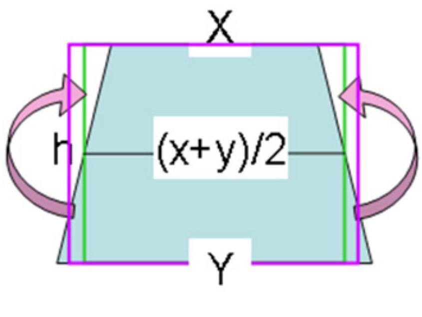
二、題中有題，錯中有錯

作完上述的討論後，可以確定圓錐台的一般化公式。但是還有值得討論的地方

嗎？我們再次將『學生以為的體積公式』拿來作文章。我們可以讓此公式【(上底面積＋下底面積）×高÷2】來讓學生揣摩是否為如圖七以切割填補的方式來解釋這樣的公式？說明白點，就是將圓錐台的側面（梯形）的中間（梯形中位線）切一半，然後將下面的體積補到上方去，如此便成為一直圓柱了。我想大多數的同學都會認為此公式等價於這樣的圖形結構，在此我們可再用代數來解決此問題，我們只要以『學生以為的圓柱』體積問題一般化，看看是否等於 $\frac{h\pi}{8}(x^2+y^2)$便知。



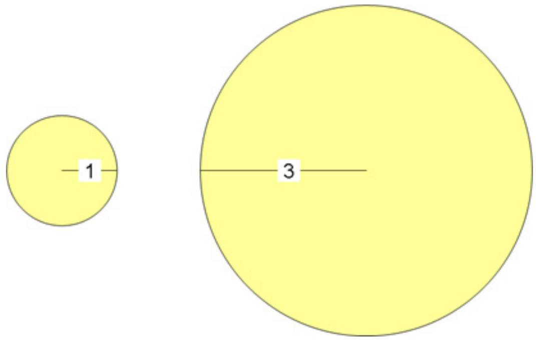
圖八、圓錐台體積變圓柱（綠色）



圖九、圓錐台體積變圓柱（紫色）

如上圖，此圓柱的的底面直徑為 $\frac{x+y}{2}$，體積為 $\pi h(\frac{x^2+2xy+y^2}{16}) \neq \frac{h\pi}{8}(x^2+y^2)$，顯然是不一樣的，但是何者較大呢？兩式相減便知分曉：$\frac{h\pi}{8}(x^2+y^2)-\pi h(\frac{x^2+2xy+y^2}{16})=\frac{h\pi}{16}(2x^2+2y^2)-\pi h(\frac{x^2+2xy+y^2}{16})=\frac{h\pi}{16}(x-y)^2 \geqq 0$ 也就是說，若將學生認知錯誤的公式來作體積的變化的話，此變化後的圓柱體積應該比當初認為的應該更大一些，如圖九中紫色的圓柱體積。由此可見原來的思考方向犯了什麼樣的錯誤迷思概念嗎？我們可由兩個圓形面積的等差中項及以兩個圓半徑的等差中項形成的圓來作比較便知：

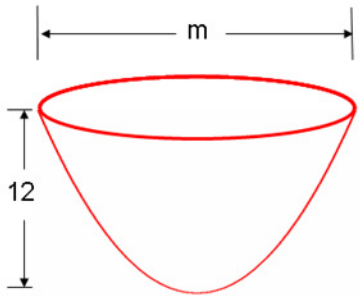
下圖為兩個半徑為 1 及 3 的圓，面積分別為 π 及 9π，等差中項為 5π；兩個圓半徑的等差中項為 2，面積為 4π≠5π，這就是問題的癥結所在。也就是說，線段的等差中項並不等價於面積的等差中項。



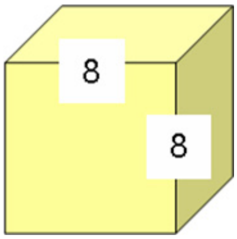
圖十、半徑為 1 及 3 的兩圓

參、例二：拋物線

如圖十一，已知有一個側面為拋物線，內部最深為 12 公分的容器，及一個邊長為 8 公分的正立方體。今將正立方體放入容器內，恰使正立方體的頂面與容器的開口面相切齊，試求容器的開口 m 之值為何？



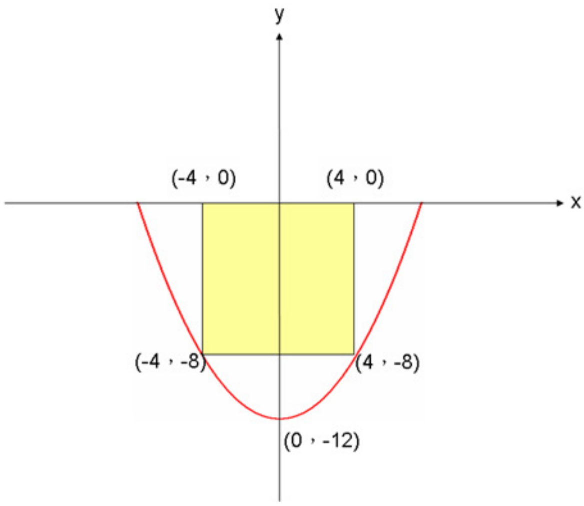
圖十一



圖十二

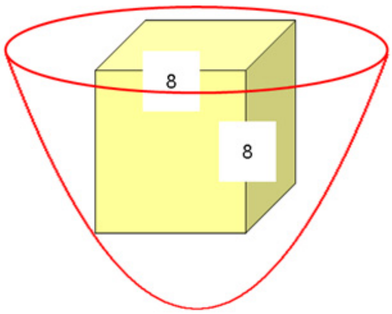
此題為數學習作的其中一道絕妙好題，怎說？正當筆者批改學生的答案時，發現有算出答案的學生皆答錯，且犯了一致性的錯誤，以下是學生的解答過程：

因為拋物線頂點為（0，－12），故令 $y = a\,x^2 - 12$，將（4，－8）代入得到$-8 = 16a - 12 \rightarrow 16a = 4 \rightarrow a = \frac{1}{4}$。故得 $y = \frac{1}{4}x^2 - 12$，再令 $y = 0 \rightarrow 0 = \frac{1}{4}x^2 - 12 \rightarrow x = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$，所以 $m = 8\sqrt{3}$。

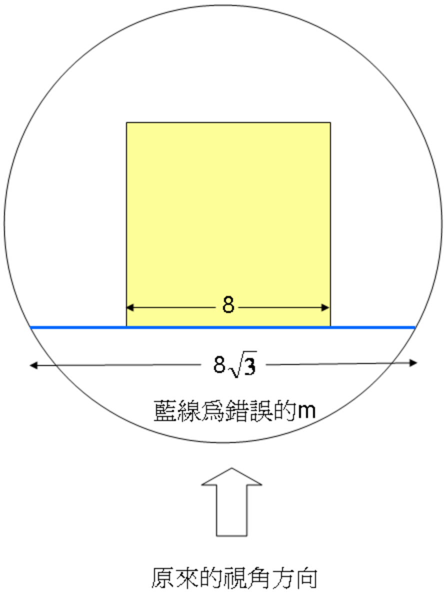


圖十三

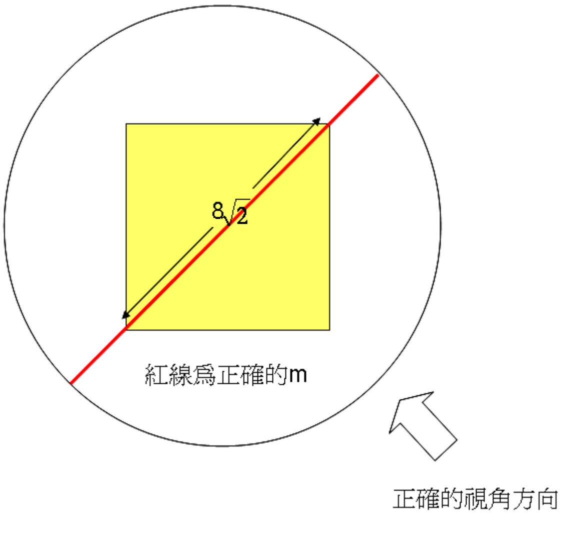
當筆者發現此問題後的次節課將之與學生一同討論，當下學生仍無法看出其錯誤之處，因此筆者將此模型立體化。



圖十四



圖十五

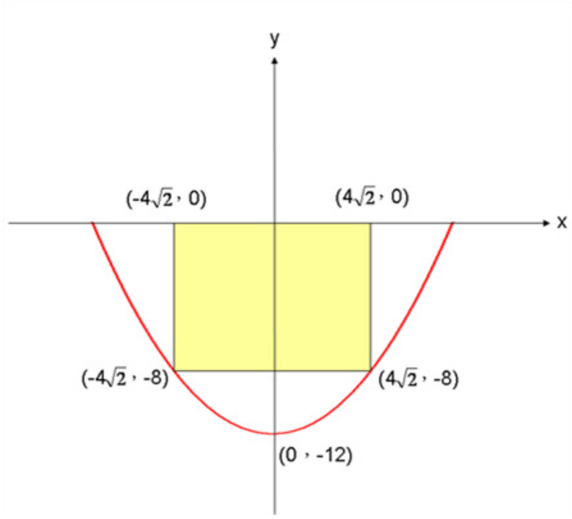


圖十六

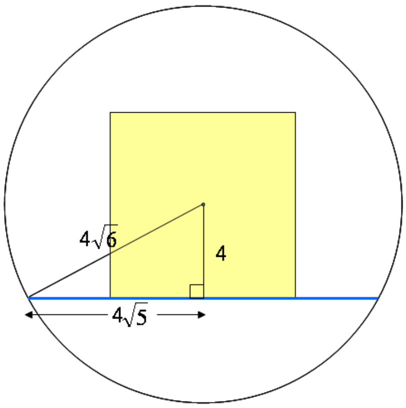
經過如上圖的概念講解之後，學生恍然大悟原來是之前的認知錯誤。所以正確的 m 應為圖十六中紅色線段（也就是容器的直徑），因此此題正確的解法如下：

令 $y=ax^2-12$，將（$4\sqrt{2}$，-8）代入得到 $-8=32a-12 \rightarrow 32a=4 \rightarrow a=\frac{1}{8}$。

故得 $y=\frac{1}{8}x^2-12$，再令 $y=0 \rightarrow 0=\frac{1}{8}x^2-12 \rightarrow x=\pm\sqrt{96}=\pm 4\sqrt{6}$，所以 $m=8\sqrt{6}$。



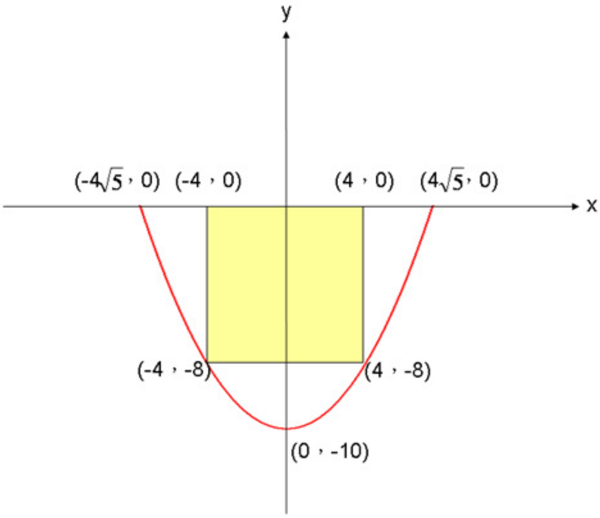
圖十七



圖十八

不過話說回來，算錯的拋物線會不會是圖中藍線（如圖十八，在此假設此藍線

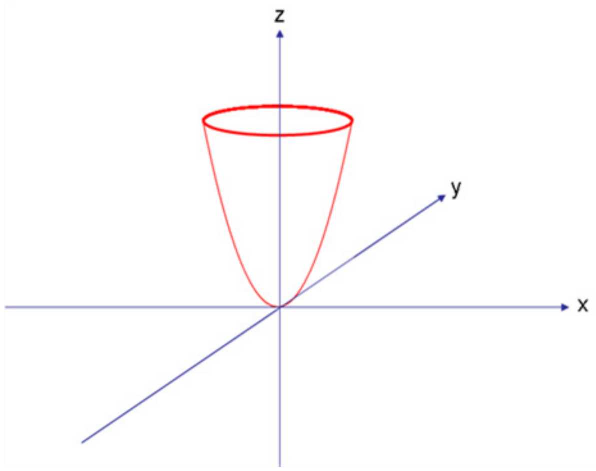
為垂直紙面的拋物線)?乍看之下好像是,其實不然,因為平面並不會通過容器的最低點(0,－12),所以此方程式並非藍色平面與容器的相交拋物線,也就是說學生當初算的藍色線段 m＝$8\sqrt{3}$是錯的,由畢氏定理得知算錯的 m 應該是 $4\sqrt{5}\times 2=8\sqrt{5}$才對,而當初算錯的拋物線方程式也並非 $y=\frac{1}{4}x^2-12$,而是 $y=\frac{1}{8}x^2-10$。



圖十九

容器的方程式

此題其實容器的方程式的討論牽扯到微積分的雙變數函數,但在此我們可以用較簡單的方式來說明。由於容器是立體空間,所以此容器須以三軸坐標系來表示其形狀,假設頂點為(0,0,0),此方程式為 $z=\frac{1}{8}(x^2+y^2)$。只要令 y＝0,即可得到 $z=\frac{1}{8}x^2$;反之,令 $x=0$ 可得到 $z=\frac{1}{8}y^2$這樣的拋物線。若令 $z=c$($c>0$),則得到 $x^2+y^2=8c$ 的圓方程式,其中圓的半徑為 $\sqrt{8c}$ 。



圖二十

參考文獻

洪有情主編(2011):康軒國中數學習作版 3 下。新北市:康軒文教。P.14。