

新北市立高級中等學校 107 學年度教師聯合甄選

數學科 試題

一、填充題：70%，每題 10 分。

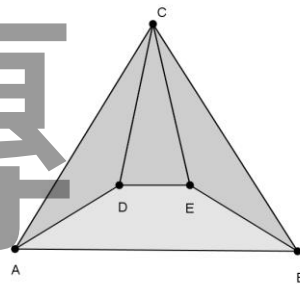
1. 若  $x, y, z$  滿足 
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{3+\log 2} + \frac{z}{3+\log 5} = 1 \\ \frac{x}{7} + \frac{y}{7+\log 2} + \frac{z}{7+\log 5} = 1 \\ \frac{x}{11} + \frac{y}{11+\log 2} + \frac{z}{11+\log 5} = 1 \end{cases}$$
，則  $x+y+z$  之值為\_\_\_\_\_。

2. 坐標空間中，圓  $O$  是平面  $y=z$  上以原點  $(0,0,0)$  為圓心的單位圓。若點  $P$  的坐標為  $(4,4,12)$ ，而點  $X$  是圓  $O$  上的動點，則  $\overline{PX}$  的最大值為\_\_\_\_\_。

3. 設  $f(x)$  是最高次項係數為 2 的三次多項式函數， $g(x)$  是二次多項式函數，滿足  $f(1)=g(1)+2, f(2)=g(2)+3, f(3)=g(3)+4$ 。若  $3f(1)-3f(2)+f(3)=5$ ，則  $f(x)$  的常數項係數為\_\_\_\_\_。

4. 從 4 個  $a$ 、4 個  $b$ 、4 個  $c$ 、4 個  $d$  (共四種、16 個字母) 中選出 10 個字母排成一列 (同一種字母都視為相同)。若每種字母至少選出 2 個，則有\_\_\_\_\_種排列方式。(答案須化簡至單一的數字才給分!)

5. 如圖， $\triangle ABC$  為正三角形且  $D, E$  為其內部兩點。已知  $\overline{CD} = \overline{CE} = \sqrt{7}$ 、 $\overline{DE} = 1$ 、 $\overline{AD} = \overline{BE} = 2$ ，則  $\overline{AB}$  的長度為\_\_\_\_\_。



6. 在平面上，令  $R$  代表由拋物線  $y=x^2$ 、直線  $x=0$  及直線  $y=1$  所圍成的區域。試求：區域  $R$  繞著直線  $y=2$  旋轉所得的旋轉體之體積為\_\_\_\_\_。

7. 已知  $p$  為質數， $n$  為正偶數，且  $\sqrt{1-\frac{1729}{p^n}}$  為有理數，則所有可能的  $p$  值為\_\_\_\_\_。

二、計算證明題：30%，每題 15 分。

1. (a) 已知三階行列式  $\begin{vmatrix} x & x^3 + ax^2 & b \\ y & y^3 + ay^2 & b \\ z & z^3 + az^2 & b \end{vmatrix}$  的展開式是  $x, y, z$  的多項式，其中  $a, b$  為常數。

試將此多項式分解成  $x, y, z$  的一次式乘積。 (5 分)

- (b) 試在坐標平面上找出 107 個相異點  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{107}$  的坐標，並滿足：

「任相異三點  $A_i, A_j, A_k$  共線的充分且必要條件是  $i + j + k = 110$ 。」 (10 分)

2. 已知三角形  $ABC$  及其  $BC$  邊上的任意一點  $P$  (其中  $P$  異於  $B, C$  兩點)，試證：

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{CP} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BP} = (\overline{AP}^2 + \overline{BP} \cdot \overline{CP}) \cdot \overline{BC}。 \quad (15 \text{ 分})$$

新聞稿專用