

臺中市立文華高級中等學校 107 學年度第 1 次教師甄選 數學科專業知能試題本(填充題公告)

測驗說明：

- 一、本測驗分成二大題：填充題(75 分)及計算證明題(25 分)。
- 二、填充題作答說明：請將正確答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，全對才給分，不需計算過程。
- 三、計算證明題作答說明：請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由。
- 四、另附五張 A4 計算紙，可供計算或打草稿，請勿用答案卷正反面打草稿。計算紙上方請書寫准考證號碼，並於考試完畢隨試題收回。

一、填充題(每題 5 分，共 75 分，全對才給分。)

1. 在實數數列 $\langle a_n \rangle$ 中，已知 $a_1 = 1$ ， $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 。若 $a_n = \sqrt{S_{n-1}} + \sqrt{S_n}$ ($n \geq 2$)，則 a_{107} 之值為_____。
2. 設 $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + a_8x^8 + a_7x^7 + \cdots + a_1x + a_0$ 為實係數多項式。若 $f(x) = 0$ 的所有根都是 $x^2 - x + 3 = 0$ 的根，則 $a_7 =$ _____。
3. 有相同的 3 面白旗、2 面黑旗、2 面紅旗，共 7 面旗子全部掛在 A、B、C 三根旗桿上，每根旗桿可掛旗數不限，也可以不掛。若需考慮掛上旗桿的排列順序，則共有_____種不同的掛法。
4. 設 $\triangle ABC$ 的三邊長為 a, b, c ，且 a, b, c 為方程式 $x^3 - 3\sqrt{6}x^2 + 17x - 5\sqrt{6} = 0$ 的三根，則 $\triangle ABC$ 的面積為_____。
5. 設 D 為 $\triangle ABC$ 的 \overline{BC} 上之一點，且 $\overline{BD} = \overline{AC} = 1$ ，若 $\angle BAD = 30^\circ$ ， $\angle CAD = 90^\circ$ ，則 \overline{CD} 之長為_____。
6. $\overrightarrow{OP} = (x - 2y, 2x - y, 3x + 2y)$ ，其中 $1 \leq x \leq 2$ ， $-1 \leq y \leq 1$ ，則所有 P 點所形成的圖形面積為_____。

7. 已知空間中平面 $E: 2x - y + 2z + 9 = 0$ 及兩定點 $A(3, 4, 1)$ 、 $B(1, -2, 5)$ ，若動點 P 在平面 E 上移動，則 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 的最小值為_____。

8. 已知橢圓 $\Gamma: 25x^2 + 4y^2 = 100$ 之一弦 \overline{AB} 的中點為 $(1, -4)$ ，則直線 \overline{AB} 之方程式為_____。

9. 已知函數 $f(x) = x^3 + x^2 + x$ ，若 $g(x)$ 為 $f(x)$ 的反函數(即 $f^{-1}(x) = g(x)$)，則函數 $y = f(x)$ 的圖形與函數 $y = g(x)$ 的圖形所圍成的區域面積為_____。

10. 設 z_1, z_2, z_3 為複數， $i = \sqrt{-1}$ ， $k \in R$ ， $\omega = -\sqrt{3} + i$ ，已知 $z_1 = (2\cos\theta + 3) + i(2\sin\theta + 5)$ ， $0 \leq \theta < 2\pi$ ， $|z_2 - z_1| = 1$ ， $z_3 = k\omega + 2$ ，則 $|z_2 - z_3|$ 之最小值為_____。

11. 空間中三向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ， $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ，若

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & \alpha & 1 \\ \alpha & 9 & \beta \\ 1 & 0 & \beta & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 且 } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 三向量所展開的平行六面體}$$

體積為 $20\sqrt{3}$ ，則內積 $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b}$ 之最大值為_____。

12. 投擲一公正骰子，若連續兩次擲出相同的點數或投擲滿 n 次則停止投擲(n 為正整數， $n \geq 2$)，令 E_n 表示投擲次數的期望值，則 $E_n =$ _____。

13. 設 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^3 - 2n$ ，則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n}} - \sqrt[3]{a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n}}}{n} = \text{_____}。$$

14. 計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{(3n+k)(n-k)}}{n^2} =$ _____。

15. $f^{(n)}(x)$ 表示函數 $f(x)$ 微分 n 次。已知 $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ ，則 $f^{(7)}(0) =$ _____。