

# 新竹高中107學年度數學科教師甄試試題

## 第一部分(填充題, 每題5分)

1. 設  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ ,  $f: A \rightarrow B$ , 使  $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) = 8$  有幾種?
2. 實係數四次方程式  $x^4 - 8x^3 + 24x^2 + ax + b = 0$  為兩實根兩虛根, 兩實根和為 4, 兩虛根積為 5, 求  $(a, b)$ 。
3.  $A, B$  為相異四位數的正整數,  $\log A$  的尾數為  $\log B$  的 3 倍, 若  $A$  的最大值為  $m$ , 此時  $B$  的最大值為  $n$ , 求  $(m, n)$ 。
4. 某老師一天可能有 3 到 5 堂數學課(一天有 8 堂), 然後不能有連 3 而且第 4 第 5 節不能同時排, 問一天有多少種排數學課方式(不考慮不同班級)。
5. 有兩條直線  $L_1: y = 2x - 106$ 、 $L_2: y = 3x - 107$ , 平面座標上有一點  $P(4, 5)$  對  $L_1$  的對稱點為  $Q$ ,  $Q$  對  $L_2$  的對稱點為  $R$ ,  $L_1$ 、 $L_2$  的交點為  $K$ , 則  $\tan \angle PKR$  為?
6.  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $-2 \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}$ ,  $x + 2y$  的最大值為  $M$ 、最小值為  $m$ , 數對  $(M, m)$  為?
7.  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , 若  $a^2 + b^2 + c^2 = 10$ 、 $d^2 \leq 4$ , 求  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & d & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$  的最大值。
8.  $\omega = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ , 求  $|2 - \omega|^2 + |2 - \omega^2|^2 + \dots + |2 - \omega^6|^2$ 。
9.  $a_n = \left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^4\right] + \left[1 - \left(\frac{n-2}{n}\right)^4\right] + \left[1 - \left(\frac{n-3}{n}\right)^4\right] + \dots + \left[1 - \left(\frac{n-2n}{n}\right)^4\right]$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 。
10.  $L: \frac{x+6}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-1}{6}$  上的一點  $A(-6, -4, 1)$ ,  $E: 19x - 4y + 8z = 8$ ,  $L$  與  $E$  交於一點  $B$ , 在平面上有一點  $C$ , 使得  $\overline{AB} = \overline{AC}$ , 則當  $\triangle ABC$  面積最大時,  $C$  點座標為?

## 第二部分(計算題, 每題10分)

1.  $f(x)$  為 3 次實係數多項式,  $f(x)$  在  $x = 1$  以及  $x = 5$  時有極值, 且  $f(x)$  在  $(3, f(3))$  的切線方程式為  $y = 4x - 12 + f(3)$ , 求  $\int_0^2 f'(x) dx$ 。
2. 數列  $\langle a_n \rangle$  的前  $n$  項之和為  $S_n$ 。若  $a_1 = \frac{4}{3}$ 、 $(4^n - 1)a_n = 3 \times 4^{n-1} S_n$ , 求下列各小題:
  - (1)  $S_n$ 。
  - (2) 設  $b_n = \frac{n}{3a_n}$ ,  $T_n$  為  $\langle b_n \rangle$  前  $n$  項之和, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ 。

3. (1) 求  $x^2 + y^2 = 2$  與  $y = 1$  所圍成較小的弓形繞  $x$  軸旋轉的旋轉體體積。  
(2) 求  $x^2 + y^2 = 2$  與  $x + y = \sqrt{2}$  所圍成較小的弓形繞  $x + y = \sqrt{2}$  旋轉的體體積。

4. 設  $X \sim B(n, p)$ , 求  $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$ 。

5. 用 4 種顏色塗右圖九宮格，顏色可重複使用，相鄰不同色，每區只能塗一色，有幾種塗法？

