

請不要翻到次頁！
閱讀完本頁作答說明，並聽從監試委員的指示再開始作答！

測驗說明

題本採雙面印刷，題目共 23 題 (第一部份單一選擇題 10 題，每題 3 分。第二部份選填題，每題 4 分，第三部份計算題 3 題，每題 10 分。合計 100 分)。測驗時間從 9:00 到 11:00，共 120 分鐘。作答開始與結束請聽從監試委員的指示。

注意事項

1. 可利用題本中空白部份計算，切勿在答案卡上計算。
2. 答案卡上不得做任何記號。答案卡若汙損或損壞，本測驗不予計分。
3. 開始作答前，請先填寫答案卡與計算卡上方個人資料，並畫記參加年級及准考序號，再開始作答。若未填寫或畫記清楚者，不予計分。

作答方式

請依照題意解出答案，並用 2B 鉛筆在答案卡上相應的位置畫記，請務必將選項塗黑、塗滿。如果需要修改答案，請使用橡皮擦擦拭乾淨，重新塗黑答案。
例如答案為 5，則將 [5] 塗黑、塗滿，即：[1][2][3][4]■[6][7][8][9][0]

電腦閱卷卡

1. 手寫欄的部分用原子筆或鋼筆填寫。
2. 請用 HB 或 2B 鉛筆畫記清楚年級和准考序號欄位 []，再開始作答。
3. 畫線要粗黑、清晰、塗滿格不可出格，用橡皮擦拭要清潔，若畫線過輕或汙損不清使機器無法識別，由考生自行負責。

計算題作答卡

1. 請用原子筆(黑色、藍色)或鋼筆填寫。
2. 盡可能在規定欄位內作答完畢。若書寫欄位不足可跨欄作答，但需註明題號。
3. 若作答卡不夠，可舉手向監考老師索取備用作答卡。

希望杯數學邀請賽 電腦閱卷答題卡

縣市：_____ 學校：_____ 年級：_____ 姓名：_____

注意事項
1. 手寫欄的部分用原子筆或鋼筆填寫。
2. 請用 HB 或 2B 鉛筆塗滿畫記欄位 []。
3. 畫線要粗黑、清晰、塗滿格不可出格，用橡皮擦拭要清潔，若畫線過輕或汙損不清使機器無法識別，由考生自行負責。
正確：■ 錯誤：□

參賽年級

初四	初五	初六	初七	初八	初九
年級	年級	年級	年級	年級	年級

准考序號

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[0]
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

缺考註記欄
 由監試人員註記 (請考人請勿註記)

答題欄

①	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
②	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
③	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
④	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑤	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑥	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑦	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑧	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑨	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑩	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑪	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑫	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑬	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑭	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑮	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑯	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑰	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑱	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑲	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
⑳	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
㉑	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
㉒	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
㉓	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
㉔	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]
㉕	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]

希望杯數學邀請賽 計算題作答卡 准考序號：□□□□□□□□□□

學校：_____ 參賽年級：_____ 年級：_____ 姓名：_____

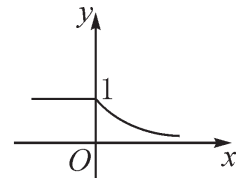
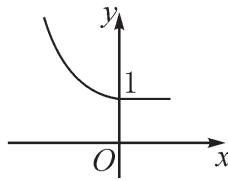
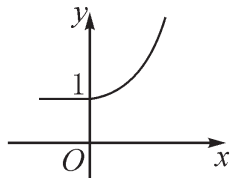
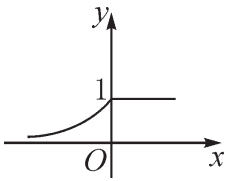
題號 _____

題號 _____

★若算式過長，可跨欄填寫，但請標示題號。

一、單一選擇題 (每題 3 分，計 30 分)

1. 定義運算： $a \otimes b = \begin{cases} a(a \geq b) \\ b(a < b) \end{cases}$ ，則函數 $f(x) = 1 \otimes \frac{1}{2^x}$ 的圖像是 ①。
- (1) (2) (3) (4)



2. 已知 a, b 是方程 $x^2 + 2000x + 1 = 0$ 的兩個根，則 $(a^2 + 2014a + 15)(b^2 + 2015b + 16)$ 的值為 ②。
- (1) 0 (2) 1 (3) -419580 (4) -420000

3. 若數列 $\{a_n\}$ 為等差數列，且 $3(a_3 + a_5) + 2(a_7 + a_{10} + a_{13}) = 24$ 。則此數列前 13 項之和等於 ③。
- (1) 13 (2) 26 (3) 52 (4) 156

4. 定義集合 $A_k = \{x | x \text{ 是 } k \text{ 個大於 } 1 \text{ 的連續自然數之積}\}$ ($k=1, 2, \dots$)，那麼集合 $A_3 \cap A_5$ 中的最小元素是 ④。
- (1) 24 (2) 60 (3) 120 (4) 720

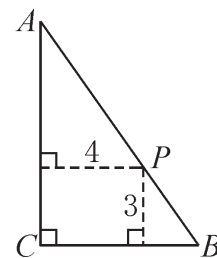
5. 對任意的實數 x ，若關於 x 的不等式 $(1-a)x^2 - 2(1-a)x + 6 > 0$ 恒成立，那麼大於 a 的最小整數是 ⑤。
- (1) 2 (2) 1 (3) 0 (4) -5

6. 已知函數 $f(x) = 1 - 2^x$ ， $g(x) = x^2 - 4x + 3$ ，若存在 a, b 使得 $f(a) = g(b)$ ，則 b 的取值範圍是 ⑥。
- (1) $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$ (2) $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ (3) $[1, 3]$ (4) $(1, 3)$

7. 已知函數 $f(x) = \frac{x^2 + ax + 14}{x + 2}$ ($a \in R$)，若對任意的 $x \in N^*$ ， $f(x) \geq 3$ 恒成立，則 a 的取值範圍是 ⑦。
- (1) $(-\infty, -\frac{8}{3}]$ (2) $[\frac{26}{3}, +\infty)$ (3) $[-\frac{8}{3}, +\infty)$ (4) $[-3, +\infty)$

8. 當 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 時，關於 x 的函數 $y = -a \left(\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right)$ 的圖像與 $|y| = 2$ 的圖像恰有兩個不同的交點，則實數 a 的取值範圍是 ⑧。
- (1) $|a| < 1$ (2) $|a| > 1$ (3) $|a| < 2$ (4) $|a| > 2$

9. 如圖 1，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜邊 \overline{AB} 上有點 P ，它到這個三角形兩條直角邊的距離分別為 4 和 3，則當 $\triangle ABC$ 的面積最小時， \overline{PB} 的長是 ⑨。
- (1) 5 (2) 4
(3) 3 (4) $\frac{3}{4}$

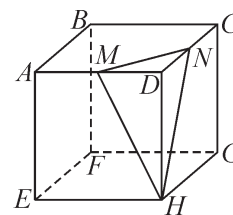


(圖 1)

10. Given $m, n \in \mathbf{Z}$, define $f(x) = \log_2(4 - |x|)$ in the interval $[m, n]$. The value range of $f(x)$ is $[0, 2]$. If there exists only one zero point on $g(x) = 2^{|x-1|} + m + 1$, then $m + n =$ ⑩。
- (1) -1 (2) 0 (3) 1 (4) 2 (英漢小詞典：interval 區間；value range 值域)

二、選填題 (每題 4 分，計 40 分)

11. 如圖 2， $ABCD-EFGH$ 是一個正方體， M 、 N 是所在棱的中點，用過 M 、 N 、 H 三點的平面切開此正方體，切下的三棱錐的表面積與原正方體表面積的比是 ⑪:⑫。

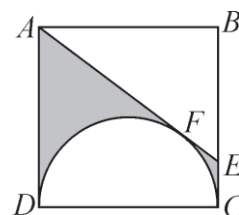


(圖 2)

12. 若函數 $f(x)$ 為奇函數，當 $1 \leq x \leq 4$ 時， $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ，則當 $-4 \leq x \leq -1$ 時，函數 $f(x)$ 的最大值為 ⑬⑭。
13. 平面上有點 $A(-3, 0)$ 和 $B(0, -3)$ ，點 C 在直線 $l: 3x + y - 2 = 0$ 上運動，當 $CA + CB$ 最小時，點 C 的座標為 $(-\frac{15}{16}, \frac{17}{20})$ 。
14. 已知拋物線 $y = ax^2 + bx$ 過點 $A(4, 0)$ ，若點 $B(x, y)$ 為該拋物線在第一象限內的一個動點，且使得 $\triangle AOB$ 的面積取到最大值 8，則 $a + b =$ ⑰。
15. 已知平面直角坐標系中，點 $B(2, 0)$ ，點 A 在線段 OB 上， $\overline{AB} = \sqrt{2}$ 。將線段 OB 繞點 O 按逆時針方向旋轉角 α ($0 < \alpha < \pi$) 到點 B' ，點 A 到點 A' ，對於 y 軸上的點 P ，若 $\triangle B'PA'$ 是以 $\angle B'$ 為頂角的等腰三角形，則 α 的取值範圍是 $[\frac{\pi}{22}, \frac{23\pi}{24}]$ 。
16. 若關於 x 的不等式 $(k^2 - 1)x^2 + 2(k + 1)|x| + 1 > 0$ 對於任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，則實數 k 的取值範圍是 $k \geq 25$ 或 $k \leq 26$ 。

17. 若 $a^2 + 4b^2 = 1$ ，則 $\frac{8ab}{a + 2b}$ 的最大值為 $\sqrt{28}$ 。

18. As shown in the Fig.3, the side length of square $ABCD$ is 4. E is on BC . AE is tangent to a half circle at point F . The half circle is inside the square with CD as diameter. Find the area of the shaded portion.



(Fig.3)

Answer: 29 30 - 31π 。(英漢小詞典：diameter 直徑；tangent 相切的)

19. 定義符號函數 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ，令數列 $a_n = \operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2n\pi}{3} \right) \right)$ ，

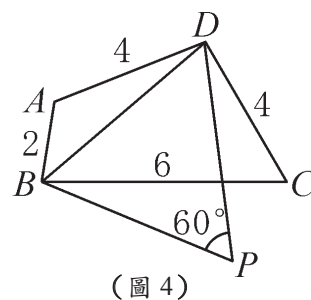
$b_1 = 1, b_2 = 2, b_{n+2} = b_{n+1} - b_n (n \geq 3)$ ，則 $\sum_{k=1}^{2015} a_k b_k = \underline{\quad \textcircled{32} \quad}$ 。

20. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分別是角 A, B, C 的對邊， $a=7, c=5, \cos B = \frac{3}{5}$ ，則 $\angle C = \underline{\quad \frac{\pi}{\textcircled{33}} \quad}$ 。

三、計算題（每題 10 分，計 30 分）

21. 已知 $a_n = \log_{n+2}(n+3) (n \in \mathbb{N}^*)$ ，定義：可使乘積 $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$ 為整數的 $k (k \in \mathbb{N}^*)$ 為“最佳數”，求在區間 $[1, 2015]$ 內的所有“最佳數”的和。

22. 如圖 4，四邊形 $ABCD$ 有外接圓，已知 $\overline{AB} = 2, \overline{BC} = 6, \overline{CD} = \overline{DA} = 4$



(1) 求對角線 \overline{BD} 的長；(5 分)

(2) 作 $\angle BPD = 60^\circ$ ，試求 $\overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$ 的取值範圍。(5 分)

23. 已知數列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 滿足 $a_1 = b_1 = 6, a_2 = b_2 = 4, a_3 = b_3 = 3$ ，當 $n \geq 1$ 時，若數列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 為等差數列，數列 $\{b_n - 2\}$ 為等比數列。

(1) 求數列 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 的通項公式；(5 分)

(2) 設 $f(n) = a_n - b_n, n \in \mathbb{N}^*$ ，當 $n \geq 4$ 時，求 $f(n)$ 的最小值。(5 分)