107 年大學入學學力測驗數學試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（佔 60 分）

一、單選題（佔 35 分）

1. 給定相異兩點 A、B，試問空間中能使 ΔPAB 成一正三角形的所有點 P 所成集合爲下列哪一選項？
   (1)兩個點　(2)一線段　(3)一直線　(4)一圓　(5)一平面。【107 年學測】

答：(4)

解：以 $\overline{AB}$ 爲軸，P 繞成一圓

2. 一份試卷共有 10 題單選題，每題有 5 個選項，其中只有一個選項是正確答案。
   假設小明以隨機猜答的方式回答此試卷，且各題猜答方式互不影響。
   試估計小明全部答對的機率最接近下列哪一選項？
   (1)10^{-5}　(2)10^{-6}　(3)10^{-7}　(4)10^{-8}　(5)10^{-9}。【107 年學測】

答：(3)

解：$x=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{10} \Rightarrow \log x=-10\log 5=-6.990=-7+0.01=\log 1.\cdots\times 10^{-7}$

解：$x=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{10}=\left(\dfrac{2}{10}\right)^{10}=2^{10}\times 10^{-10}=1024\times 10^{-10}=1.024\times 10^{7}$

3. 某公司規定員工可在一星期（七天）當中選擇兩天休假。若甲、乙兩人隨機選擇休假日且兩人的選擇互不相關，試問一星期當中發生兩人在同一天休假的機率爲何？
   (1)$\dfrac{1}{3}$　(2)$\dfrac{8}{21}$　(3)$\dfrac{3}{7}$　(4)$\dfrac{10}{21}$　(5)$\dfrac{11}{21}$。【107 年學測】

答：(5)

解：機率$=\dfrac{C_2^7+C_1^7C_2^6\times 2!}{C_2^7C_2^7}=\dfrac{11}{21}$

解：反面思考$\Rightarrow 1-P(2\text{人}\,2\text{天皆不同})=1-\dfrac{C_2^7\cdot C_2^5}{C_2^7\cdot C_2^7}=1-\dfrac{10}{21}=\dfrac{11}{21}$

4. 試問有多少個整數 x 滿足 $10^9<2^x<9^{10}$？
   (1)1 個　(2)2 個　(3)3 個　(4)4 個　(5)0 個。【107 年學測】

答：(2)

解：$\log 10^9<\log 2^x<\log 9^{10} \Rightarrow \dfrac{9}{0.3010}<x<\dfrac{10\times 0.9542}{0.3010}$

$\Rightarrow 29.90\cdots<x<31.70\cdots \xrightarrow{x\in z} x=30\,,31$

5. 試問共有幾個角度 θ 滿足 $0°<\theta<180°$，且 $\cos(3\theta-60°)$，$\cos 3\theta$，$\cos(3\theta+60°)$ 依序成一等差數列？
   (1)1 個　(2)2 個　(3)3 個　(4)4 個　(5)5 個。【107 年學測】

答：(3)

解：$\cos(3\theta-60°)+\cos(3\theta+60°)=2\cos3\theta \Rightarrow 2\cos3\theta\cos60°=2\cos3\theta \quad \Rightarrow \cos3\theta=0$

$\xrightarrow{0°<\theta<180° \Rightarrow 0°<3\theta<540°} 3\theta=90°,270°,450° \quad \Rightarrow \theta=30°,90°,150°$

6. 某貨品爲避免因成本變動而造成售價波動太過劇烈，當週售價相對於前一週售價的漲跌幅定爲當週成本相對於前一週成本的漲跌幅的一半。例如下表中第二週成本上漲 100%，所以第二週售價上漲 50%。依此定價方式以及下表的資訊，試選出正確的選項。

【註：成本漲跌幅$=\dfrac{\text{當週成本}-\text{前週成本}}{\text{前週成本}}$，售價漲跌幅$=\dfrac{\text{當週售價}-\text{前週售價}}{\text{前週售價}}$。】

	第一週	第二週	第三週	第四週
成本	50	100	50	90
售價	120	180	x	y

(1) $120=x<y<180$　(2) $120<x<y<180$　(3) $x<120<y<180$　(4) $120=x<180<y$
(5) $120<x<180<y$。【107 年學測】

答：(5)

解：$x=180\times\left(1+\dfrac{50-100}{100}\times\dfrac{1}{2}\right)=135 \qquad y=135\times\left(1+\dfrac{90-50}{50}\times\dfrac{1}{2}\right)=189$

7. ΔABC 內接於圓心爲 O 之單位圓。若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，則 $\angle BAC$ 之度數爲何？
(1) $30°$　(2) $45°$　(3) $60°$　(4) $75°$　(5) $90°$。【107 年學測】

答：(4)

解：$\left|\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}\right|^2=\left|-\overrightarrow{OA}\right|^2 \quad \Rightarrow 1^2+2\sqrt{3}\times1^2\times\cos\angle BOC+3\times1^2=1^2$

$\Rightarrow \cos\angle BOC=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \angle BOC=150°$，故 $\angle BAC=75°$

二、多選題（佔 25 分）

8. 某年學科能力測驗小華的成績爲：國文11級分、英文12級分、數學9級分、自然9級分、社會12級分。他考慮申請一些校系，表 1 爲大考中心公布的學測各科成績標準；表 2 是他最有興趣的五個校系規定的申請檢定標準，依規定申請者需通過該校系所有檢定標準才會被列入篩選。例如甲校系規定國文成績須達均標、英文須達前標、且社會須達均標；丙校系則規定英文成績須達均標、且數學或自然至少有一科達前標。表 2 空白者表示該校系對該科成績未規定檢定標準。

表 1　學測各科成績標準

	頂標	前標	均標	後標	底標
國文	13	12	10	9	7
英文	14	12	9	6	4
數學	12	10	7	4	3
自然	13	11	9	6	5
社會	13	12	10	8	7

表 2　校系篩選規定

	國文	英文	數學	自然	社會
甲校系	均標	前標			均標
乙校系	前標	均標			前標
丙校系		均標	一科達前標		
丁校系	一科達前標			均標	均標
戊校系	均標	前標	均標	前標	

根據以上資訊，試問小華可以考慮申請哪些校系（會被列入篩選）？

(1)甲校系　(2)乙校系　(3)丙校系　(4)丁校系　(5)戊校系。　【107 年學測】

答：(1)(4)

解：學生：國（均），英（前）、數（均）、自（均）、社（前）

滿足甲、丁兩校篩選規定

乙（國不滿足）、丙（數自不滿足）、戊（自不滿足）

9. 已知多項式 $f(x)$ 除以 x^2-1 之餘式為 $2x+1$。試選出正確的選項。

(1) $f(0)=1$　(2) $f(1)=3$　(3) $f(x)$ 可能為一次式　(4) $f(x)$ 可能為 $4x^4+2x^2-3$

(5) $f(x)$ 可能為 $4x^4+2x^3-3$。　【107 年學測】

答：(2)(3)(5)

解：$f(x)=\left(x^2-1\right)Q(x)+2x+1$

(1)無法得知 $f(0)$　(2) $f(1)=0+2+1=3$　(3)當 $Q(x)=0$ 時，成立　(4)(5)利用長除法

10. 已知坐標平面上 ΔABC，其中 $\overrightarrow{AB}=(-4,3)$，且 $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$。試選出正確的選項。

(1) $\overline{BC}=5$　(2) ΔABC 是直角三角形　(3) ΔABC 的面積為 $\frac{11}{5}$　(4) $\sin B>\sin C$

(5) $\cos A>\cos B$。　【107 年學測】

答：(2)(3)

解：(1) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\left(\frac{22}{5},\frac{-11}{5}\right)$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\frac{11}{\sqrt{5}}$，而 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=5$

(2) $\because \left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$　$\therefore \angle C$ 為直角

(3)面積 $\frac{11}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{5}$

(4) $\sin B<\sin 90^\circ=\sin C$　(5) $\overline{BC}>\overline{AC}\Rightarrow\angle A>\angle B\Rightarrow\cos A<\cos B$

11. 坐標空間中，設直線 L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-1}$，平面 E_1：$2x-3y-z=0$，

平面 E_2：$x+y-z=0$。試選出正確的選項。

(1)點 $(3,0,-1)$ 在直線 L 上　(2)點 $(1,2,3)$ 在平面 E_1 上　(3)直線 L 與平面 E_1 垂直

(4)直線 L 在平面 E_2 上　(5)平面 E_1 與 E_2 交於一直線。　【107 年學測】

答：(3)(5)

解：(1)(2)代入不合　(3)方向向量 $\overrightarrow{L}=$ 法向量 $\overrightarrow{E_1}$　(4)應為平行　(5)正確

12. 試問下列哪些選項中的二次曲線，其焦點（之一）是拋物線 $y^2=2x$ 的焦點？

(1) $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$　(2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　(3) $x^2+\frac{4y^2}{3}=1$　(4) $8x^2-8y^2=1$

(5) $4x^2-4y^2=1$。【107 年學測】

答：(1)(3)(4)

解：$y^2=4\left(\frac{1}{2}\right)x$，向右開口拋物線，頂點 $(0,0)$，焦點 $\left(\frac{1}{2},0\right)$

(1) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=4\left(\frac{1}{4}\right)\left(y+\frac{1}{4}\right)$，向上開口，拋物線，焦點 $\left(\frac{1}{2},0\right)$

(2) 橫躺型橢圓：$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，中心 $(0,0)$，焦點 $(\pm1,0)$

(3) 橫躺型橢圓：$a=1$，$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$c=\frac{1}{2}$，中心 $(0,0)$，焦點 $\left(\frac{1}{2},0\right)$

(4) 左右開口雙曲線：$a=\frac{1}{\sqrt{8}}$，$b=\frac{1}{\sqrt{8}}$，$c=\frac{1}{2}$，中心 $(0,0)$，焦點 $\left(\pm\frac{1}{2},0\right)$

(5) 左右開口雙曲線：$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{\sqrt{2}}$，中心 $(0,0)$，焦點 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

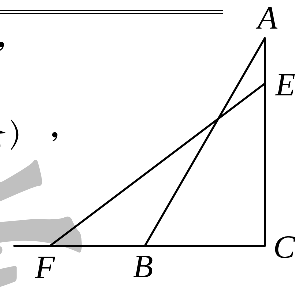
三、選填題（佔 40 分）

A. 已知座標平面上三點 $(3,\log3)$、$(6,\log6)$ 與 $(12,y)$ 在同一直線上，則 $y=\log$________。【107 學測】

答：24

解：斜率 $=\frac{\log6-\log3}{6-3}=\frac{y-\log3}{12-3}\Rightarrow y=\log24$

B. 如圖所示（只是示意圖），將梯子 $\overline{AB}$ 靠在與地面垂直的牆 AC 上，測得與水平地面的夾角 $\angle ABC$ 爲 $60°$。
將在地面上的底 B 沿著地面向外拉 51 公分到點 F（即 $\overline{FB}=51$ 公分），
此時梯子 $\overline{EF}$ 與地面的夾角 $\angle EFC$ 之正弦值爲 $\sin\angle EFC=0.6$，
則梯子長 $\overline{AB}=$________公分。【107 學測】



答：170

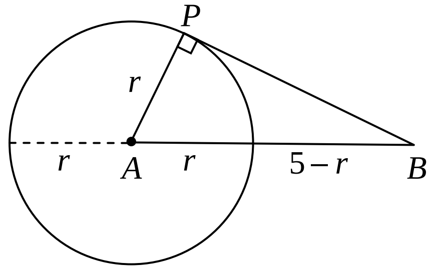
解：$\overline{AB}=\overline{EF}=x\xrightarrow{\angle ABC=60°}\overline{BC}=\frac{x}{2}\Rightarrow\cos\angle EFC=\frac{51+\frac{x}{2}}{x}=\frac{4}{5}\quad\therefore x=170$

C. 平面上兩點 A、B 之距離爲 5，以 A 爲圓心做一半徑爲 r（$0<r<5$）的圓 Γ，
過 B 做圓 Γ 的切線，切點（之一）爲 P。
當 r 變動時，ΔPAB 的面積最大可能值爲________。（化爲最簡分數）【107 學測】

答：$\frac{25}{4}$

解：ΔPAB 的面積 $=\frac{1}{2}r\cdot\sqrt{25-r^2}=\frac{1}{2}\sqrt{r^2\left(25-r^2\right)}$

$$\xrightarrow{\text{算幾不等式}} \le \frac{1}{2} \times \frac{r^2 + \left(25 - r^2\right)}{2} = \frac{25}{4}$$



解：$\overline{PB} = \sqrt{(5-r)(5+r)}$

$$S_{\Delta PAB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(5-r)(5+r)} \times r = \frac{1}{2}\sqrt{-r^4 + 25r^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{-\left(r^2 - \frac{25}{2}\right)^2 + \frac{625}{4}} \le \frac{1}{2} \times \frac{25}{2} = \frac{25}{4}$$

D. 座標平面上，圓 Γ 完全落在四個不等式：$x - y \le 4$ 、 $x + y \le 18$ 、 $x - y \ge -2$ 、 $x + y \ge -24$ 所圍成的區域內。則 Γ 最大可能面積爲________π。（化成最簡分數） 【107 學測】

答：$\frac{9}{2}$

解：$x - y = 4$ 與 $x - y = -2$ 間距離 $\frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

$x + y = 18$ 與 $x + y = -24$ 間距離 $\frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$

此長方形區域內最大內切圓面積 $\pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}\pi$

E. 座標平面上，若拋物線 $y = x^2 + 2x - 3$ 的頂點爲 C，與 x 軸的交點爲 A 、 B，則 $\cos\angle ACB =$________。（化成最簡分數） 【107 學測】

答：$\frac{3}{5}$

解：$y = (x+1)^2 - 4 = (x+3)(x-1)$，故 $C(-1,4)$、$A(-3,0)$、$B(1,0)$

$$\cos\angle ACB = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2\,\overline{AC}\cdot\overline{BC}} = \frac{3}{5}$$

F. 設 a,b,c,d,e,x,y,z 皆爲實數，考慮矩陣相乘：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -4 & 6 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x & 7 \\ 0 & y & 7 \\ -11 & z & 23 \end{bmatrix}$$

，則 $y =$________。（化成最簡分數） 【107 學測】

答：$\frac{7}{2}$

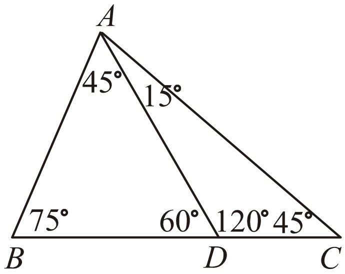
解：由 $7 + 2e = 23 \quad \Rightarrow e = 8$

由 $\begin{cases} 7c + 8d = 7 \\ -3c - 4d = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 7$，$d = -\frac{21}{4}$

由 $5c + 6d = 5 \times 7 + 6 \times \left(-\frac{21}{4}\right) = \frac{7}{2} = y$

G. 設 D 爲 ΔABC 中 $\overline{BC}$ 邊上的一點，已知 $\angle ABC = 75°$ 、 $\angle ACB = 45°$ 、 $\angle ADB = 60°$ ，若 $\overrightarrow{AD} = s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC}$ ，則 $s =$ ________ ，$t =$ ________ 。（化成最簡分數） 【107 學測】

答： $s = \dfrac{1}{3}$ ，$t = \dfrac{2}{3}$

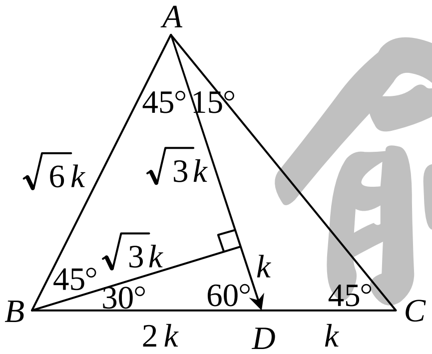


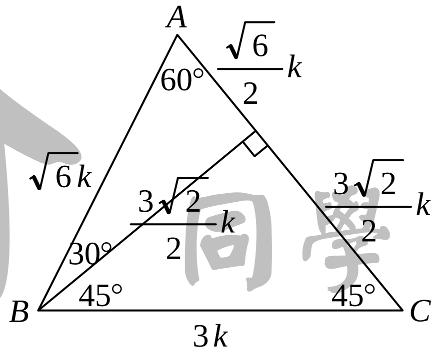
解： $\overline{AC} : \overline{AB} = \sin 75° = \sin 45° = \left(\sqrt{3}+1\right) : 2$

$\overline{BD} : \overline{CD} = \Delta ABD : \Delta ACD = 2 \times \sin 45° = \left(\sqrt{3}+1\right) \times \sin 15° = 2 : 1$

故 $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

解：





$\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

H. 將一塊邊長 $\overline{AB} = 15$ 公分、 $\overline{BC} = 20$ 公分的長方形鐵片 $ABCD$ 沿對角線 $\overline{BD}$ 對摺後豎立，使得平面 ABD 與平面 CBD 垂直，則 A 、C 兩點（在空間）的距離 $\overline{AC} =$ ________ 公分。（化成最簡根式）。 【107 學測】

答： $\sqrt{337}$

解： $\cos\angle PBC = \dfrac{9^2 + 20^2 - \overline{PC}^2}{2 \cdot 9 \cdot 20} = \dfrac{4}{5}$

$\therefore \overline{PC} = \sqrt{193}$

故 $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{PC}^2}$

$= \sqrt{12^2 + 193} = \sqrt{337}$