

填充題 8 題, 每題 7 分

- $z_1 = -12 + 5i, z_2 = 3 + 4i, \arg(z_1) = \alpha, \arg(z_2) = \beta$, 求 $\tan[(\alpha + \beta)/2] =$ _____。
- 斜率為 $-13/21$ 的直線, 在第一象限內恰過 5 個格子點, 這樣的直線有 _____ 條。
- $A = \{n \mid 1 \leq n \leq 2010\}$, A 的所有子集的最大元素的算術平均數為 S , 則最接近 S 的整數為 _____。
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [(n+k)/(n^2+k^2)] =$ _____。
- 半徑 R 的球面, A 點在東經 120 度、南緯 45 度, B 點在西經 60 度, 北緯 30 度, A, B 兩點在球面上最短距離 _____。
- $\Gamma: x^2/16 + y^2/7 = 1, F(3,0), A(-3,1), P$ 在 Γ 上, 設 $PA + PF$ 最大值 M , 最小值 m , 則 $(M, m) =$ _____。
- $y = \sin x, x=0, x=\pi$, 與 x 軸所圍區域繞 $y=1$ 旋轉的旋轉體體積為 _____。
- 五對夫婦環狀排列, 恰三對相鄰的方法數為 _____。

計算證明 4 題 (配分為 10%, 9%, 10%, 15%)

- 銳角三角形三高 AD, BE, CF 交於 H , 證
 - $CH/FH = \cos A / (\cos B \cos C)$
 - $AH/HD + BH/HE + CH/HF \geq 6$
- $x^2 + (a+1)x + a + b + 1 = 0$ 有兩實根 $x_1, x_2, 0 < x_1 < 1 < x_2$, 求 b/a 的範圍
- k 為負實數, 證明 $x^3 - \sqrt{11}x^2 - \pi x + k = 0$ 恰有一正根。
- 五小題判斷敘述是否正確? 錯誤的要找反例
 - $x^2 + ax + b = 0$ 有兩正根的充要條件為 $a^2 - 4b \geq 0, -a > 0, b > 0$
(這一題的 a, b 都是以 m 表示的一次式或二次式)
 - $\lim a_n = 0 \Rightarrow \sum a_n$ 收斂
 - a, b, c 三平面向量, 必存在唯一一組 (m, n) 使 $a = mb + nc$
 - 若 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上嚴格遞增, 則 $f'(x) > 0$, 對任意 x 屬於 \mathbb{R}
 - $f(x)$ 為 $[0, 1]$ 上的函數, 等分割 $\{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$, 則 $\lim U_n = \lim L_n$

參考答案

1. $-11/3$

2. 21

3. 2009

4. $\pi/4+(1/2)\ln 2$

5. $11\pi R/12$

6. (9,7)

7. $3\pi^2/2-4\pi$

8. 51072