# 國立台南女中九十七學年度第一次教師甄選　數學科解答

## 一、 填充題：共 65 分

第一部份：每格 4 分，共 20 分

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| E | 5 | $-2^{502}$ | 4 | $3x^2+y^2=3$ |

第二部份：每格 5 分，共 45 分

| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| (5 , 6 ) | $12x+y=3$ | $\sqrt{109}$ | $\frac{1}{12}$ | $2^{2008}$ |
| 11 | 12 | 13 | 14 | |
| $\frac{27}{4}$ | $\frac{5}{4}$ | 12 | $\frac{1}{55}$ | |

## 二、 計算證明題 ：共 35 分

**1**. 參考答案 :(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=3$　　(2) $\frac{4}{9}$

參考解法 :(1) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3\alpha}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3\beta}\overrightarrow{AE}$

$\because$ D、E、G 共線　$\therefore$ $\frac{1}{3\alpha}+\frac{1}{3\beta}=1$　$\Rightarrow$　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=3$ 為定值

(2) $\frac{\Delta ADE\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}=\frac{\overline{AD}\times\overline{AE}}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\alpha\beta$

由算幾不等式知 $\frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}}=\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}}$

$\Rightarrow$　$\frac{3}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}}$　$\Rightarrow$　$\alpha\beta\geq\frac{4}{9}$　$\therefore$ $\frac{\Delta ADE\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}\geq\frac{4}{9}$

**2**. 參考解法：

試證：$x$的方程式$x^2+ax+b=0$與$x^2+cx+d=0$兩者中至少有一個方程式有實根

設$x^2+ax+b=0$的判別式$D_1=a^2-4b$

$x^2+cx+d=0$的判別式$D_2=c^2-4d$

$\because D_1+D_2=(a^2-4b)+(c^2-4d)=a^2+c^2-4(b+d)=a^2+c^2-2ac=(a-c)^2\geq 0$

$\therefore D_1\geq 0$或$D_2\geq 0$，即兩個方程式至少有一個方程式有實根

**3**. Ans：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

參考解法：

證明： 對於$n\geq 2$，如果$a_{n-1}<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，則

$$a_n=\sqrt{1+a_{n-1}}<\sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

因為$a_1=1<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，所以依數學歸納法可得對於$\forall n\in N$，$a_n<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

明顯可知$\forall n\in N$， $a_n>0>\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$a_n=\sqrt{1+a_{n-1}}\Rightarrow a_n{}^2=1+a_{n-1}\Rightarrow$$

$$a_n{}^2-a_{n-1}{}^2=-a_{n-1}{}^2+a_{n-1}+1=-\left(a_{n-1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a_{n-1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)>0$$

$a_n{}^2>a_{n-1}{}^2$，因為$\forall n\in N$，$a_n$均正，所以$a_n>a_{n-1}$，故$a_n$遞增且有上界，故收斂

令$A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+a_{n-1}}=\sqrt{1+\lim_{n\to\infty}a_{n-1}}\Rightarrow A=\sqrt{1+A}\Rightarrow A^2-A-1=0\Rightarrow A=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

因為$A>0$，故$A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

**4**. 參考解法：

證明：　對於 $\forall x \geq a$，令 $f(x)=\ln a^{x}-\ln x^{a}=x\ln a-a\ln x$，則 $f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}$

對於 $\forall x>a\geq e$，$f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}>\ln e-\dfrac{a}{a}=0$，所以 $f(x)$ 在 $x>a$ 時為嚴格遞增函數，

$f(x)>f(a)=a\ln a-a\ln a=0$

$\Rightarrow \ln a^{x}\geq \ln x^{a}\Rightarrow a^{x}\geq x^{a}$

**5**. 參考解法：

證明：

令 $x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C$

$\dfrac{x-y}{1+xy}=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=\tan(A-B)$，同理可得 $\dfrac{y-z}{1+yz}=\tan(B-C)$，

$\dfrac{z-x}{1+zx}=\tan(C-A)$

因為 $(A-B)+(B-C)+(C-A)=0$，

所以 $\tan[(A-B)+(B-C)]=-\tan(C-A)\Rightarrow \dfrac{\tan(A-B)+\tan(B-C)}{1-\tan(A-B)\tan(B-C)}=-\tan(C-A)$

$\tan(A-B)+\tan(B-C)+\tan(C-A)=\tan(A-B)\tan(B-C)\tan(C-A)$

$\dfrac{x-y}{1+xy}+\dfrac{y-z}{1+yz}+\dfrac{z-x}{1+zx}=\dfrac{x-y}{1+xy}\times\dfrac{y-z}{1+yz}\times\dfrac{z-x}{1+zx}$

**6**. 參考解法：

當 $k \geq 2$：

$$2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)<\frac{1}{\sqrt{k}}<2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

$$\because \quad 1=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$$

$$2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}<2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)$$

$$2\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)<\frac{1}{\sqrt{3}}<2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

$$\therefore \quad 2\sqrt{n+1}+1-2\sqrt{2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1$$

$$\frac{2\sqrt{n+1}+1-2\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n+1}+1-2\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}=2$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=2$$