國立新竹高級中學 105 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

第一部分:

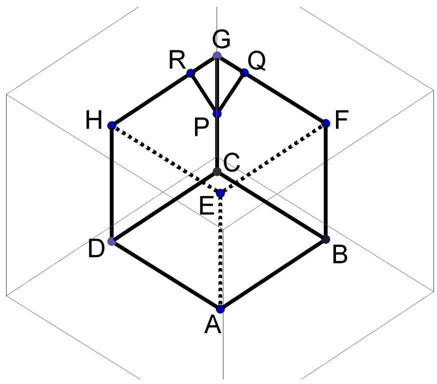
1. 令 $z_0=-1+\sqrt{3}i$, $z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$, θ 為實數, $z_1=5+12i$, 求出 $|z_1-z_0z|$ 的最大值.

2. 己知 a 為 $\frac{1}{3}x+3^x=8$ 的實數解, b 為 $x+\log_3(x+1)=24$ 的實數解. 求出 $a+b$ 的值.

3. 一整數 $n=a_1a_2\cdots a_9a_{10}$, 其中 $a_i\in\{2,3\}, i=1,2,\cdots,10$ 且任兩個 3 不相鄰. 求出滿足上述條件下, n 的個數.

4. 令 $f(x)$ 為一多項式, $\deg f(x)=104$. 已知 $f(k)=\frac{2}{k}, k\in\{1,2,\cdots,105\}$, 求出 $f(106)$ 之值.

5. 空間中一邊長為 4 的立方體, 如右圖, 將 A 點置於水平面上, 並將水注入此立方體中, 使得液面即平面 PQR , 已知 $\overline{PG}=2\overline{QG}=2\overline{RG}=2$, 求出液面至水平面的高度.



第二部分:

1. (1) 證明 $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{2k-1}^{2n}=2^{n-1}$.

   (2) 用 n 表示 $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{3k}^{3n}$.

2. 定義 $\ln x=\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

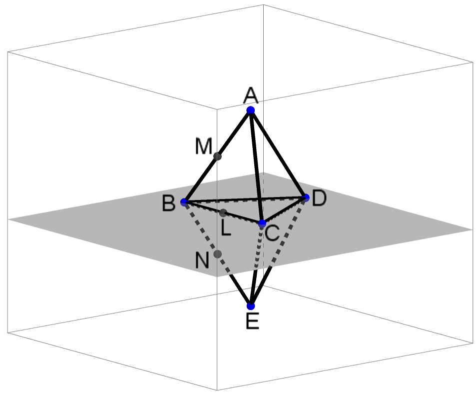
   (1) 證明 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\ln n<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

   (2) 利用定義, 證明 $\ln ab=\ln a+\ln b$.

3. 空間中, 分別取兩個棱長為 a 的正四面體的其中一個面, 並將其重合如右圖. L, M, N 分別為 $\overline{BC},\overline{AB},\overline{BE}$ 的中點:

(1) 求出 $\overline{AE}$ 的長.

(2) 已知多面體 $ABCDE$ 被 L, M, N 所決定之平面截出一多邊形, 求出此多邊形之面積.

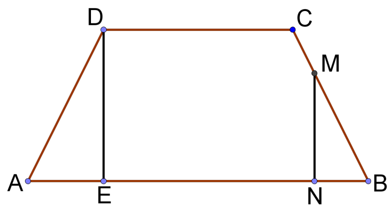


4. 令 $f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}$.

   (1) 求出 $f'(0)$.

   (2) 求出 $f(x)$ 的導函數.

5. 如右圖, 平面上 $ABCD$ 為等腰梯形, $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b, \overline{DE} = h, \overline{AN} = x$, M 在 $\overline{BC}$ 上, $\overline{DE} \perp \overline{AB}, \overline{MN} \parallel \overline{DE}$, 求出多邊形 $ANMCD$ 的面積 $S(x)$, 並畫出 $S(x)$ 的圖形.



6. 一數列 $\{\sqrt[n]{n}\}$.

   (1) 證明 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 遞減且有下界.

   (2) 求出 $\sqrt[n]{n}$ 的極限值.