

106 學年度國立科學工業園區實驗高級中學(非官方版本)

1. 設 $k \in \mathbb{R}$, $x(x-20)(2x-k) < 0$ 有 9 個正整數解且 $x^2(x-20)^4(3x-k)^5 < 0$ 有 7 個正整數解, 則 k 的範圍為何?
2. $\Gamma: \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左右焦點分別為 F_1 及 F_2 , 過 F_2 的一直線與 Γ 的右支交於 P 、 Q 兩點, 且 $\angle F_1PQ = 90^\circ$, 則 $\triangle F_1PQ$ 的內切圓半徑為何?
3. 已知數列 $\langle a_n \rangle$, $a_1 = 1$, $3a_{n+1} = 2a_n + 2 \cdot 3^n$, 試求 a_n 的一般項
4. 4 個人, 6 匹狼, 6 隻羊排成一列, 若狼和羊排在一起, 羊會被狼吃掉, 則狼和羊不相鄰的排列數為何? (人, 狼, 羊皆視為相同)
5. 設正方形 $ABCD$ 邊長為 1, E 、 F 分別為 \overline{AB} 及 \overline{AD} 上之一點, 且 $\triangle AEF$ 周長為 2, 則 $\angle ECF$?
6. 求 $\left[\frac{10^{10000}}{10^{100} + 7} \right]$ 除以 100 的餘數, 其中 $[\]$ 為高斯符號
7. 設 A 為 $n \times n$ 矩陣, 若存在 $n \times n$ 矩陣 B 使得 $AB = BA = I_n$, 則稱 A 為可逆矩陣
 - (a) 已知 A 為 $n \times n$ 可逆矩陣, 且 $AB = CA = I_n$, 證明 $B = C$
 - (b) 已知 A 為 3×3 矩陣, 且 $\det(A) \neq 0$, 證明 A 為可逆矩陣
8. 已知方程式 $n^2x^3 + nx - 1 = 0$, 其中 $n \in \mathbb{N}$
 - (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, 證明上述方程式恰有一實數解
 - (b) 若此實數解為 x_n , 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 之值
9. $\forall n \in \mathbb{N}$, 證明方程式 $x^2 + y^2 = z^n$ 至少有一正整數解, 其中 $x, y, z \in \mathbb{N}$
10. 某四面體的六邊長分別為 $a, b, 1, 1, 1, 1$, 其中 a, b 互為歪斜的稜線長, 試求:
 - (a) 此四面體體積的最大值為何?
 - (b) 體積最大值發生時, 數對 (a, b) 為何?
11. 是非題。下列的敘述若正確請證明, 錯誤請舉反例。
 - (a) 若 f 是可微函數, 則 f' 是連續函數
 - (b) 若 f 是有界且黎曼可積的函數, 則 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ 是可微函數