

大學入學考試中心

106 學年度指定科目考試數學乙試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（佔 76 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 為實係數多項式函數。若 $f(1) = f(2) = 0$ 且 $f(3) = 4$ ，則 $a + 2b + c$ 的值是下列哪一個選項？
(1)1 (2)2 (3)3 (4)4 (5)5。 【106 數乙】

答：(4) **(第一冊第二章多項函數—插值法)**

解： $f(x) = (x-1)(x-2)(x+m) \xrightarrow{f(3)=4} 4 = 2 \times 1 \times (3+m) \Rightarrow m = -1$
 $f(x) = (x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ ，故 $a + 2b + c = 4$

2. 下列哪一個選項的值最大？
(1) $\log_2 3$ (2) $\log_4 6$ (3) $\log_8 12$ (4) $\log_{16} 24$ (5) $\log_{32} 48$ 。 【106 數乙】

答：(1) **(第一冊第三章對數—對數運算)**

解： $\log_2 3 > 1$ （係假分數），故 $\log_2 3 > \log_4 6 > \log_8 12 > \log_{16} 24 > \log_{32} 48$

3. 有一個不公正的骰子，投擲一次出現 1 點的機率與出現 3 點的機率之和是 0.2，出現 2 點的機率與出現 4 點的機率之和是 0.4，出現 5 點的機率與出現 6 點的機率之和是 0.4。試選出正確的選項：
(1) 出現 1 點的機率是 0.1 (2) 出現 4 點的機率大於出現 3 點的機率
(3) 出現偶數點的機率是 0.5 (4) 出現奇數點的機率小於 0.5
(5) 投擲點數的期望值至少是 3。 【106 數乙】

答：(5) **(第五冊第一章機率與統計—隨機概念、期望值)**

解：(1)(2)(3)(4) 均無法做此推論

$$(5) E(X) = 1p + 3(0.2 - p) + 2q + 4(0.4 - q) + 5r + 6(0.4 - r) = 4.6 - 2p - 2q - r$$

$$\text{但} \begin{cases} 0 \leq p \leq 0.2 \\ 0 \leq q \leq 0.4 \\ 0 \leq r \leq 0.4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0.4 \leq -2p \leq 0 \\ -0.8 \leq -2q \leq 0 \\ -0.4 \leq -r \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -1.6 \leq -2p - 2q - r \leq 0, \text{ 故 } 3 \leq E(X) \leq 4.6$$

二、多選題（佔 40 分）

4. 考慮實數 a, b, c ，其中 $a \neq 0$ 。令 Γ 為 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形。試選出正確的選項：
(1) 若 $a > 0$ ，則 Γ 會通過第一象限 (2) 若 $a < 0$ ，則 Γ 會通過第一象限
(3) 若 $b^2 - 4ac > 0$ ，則 Γ 會通過第一象限 (4) 若 $c > 0$ ，則 Γ 會通過第一象限
(5) 若 $c < 0$ ，則 Γ 會通過第一象限。 【106 數乙】

答：(1)(4) **(第一冊第二章二次函數—二次函數一般式)**

解：(2) 可能只通過 3、4 象限 (3) 可能只通過 2、3、4 象限 (5) 可能只通過 3、4 象限

5. 設 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 是一公比為 $\frac{1}{2}$ 的無窮等比數列且 $a_1 = 1$ 。
試問以下哪些數列會收斂？

- (1) $-a_1, -a_2, \dots, -a_n, \dots$ (2) $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2, \dots$
 (3) $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}, \dots$ (4) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$
 (5) $\log a_1, \log a_2, \dots, \log a_n, \dots$ 【106 數乙】

答：(1)(2)(3) **(第六冊第一章極限概念—無窮等比)**

解：(1) 首項 -1 ，公比 $\frac{1}{2}$ (2) 首項 1 ，公比 $\frac{1}{4}$ (3) 首項 1 ，公比 $\sqrt{\frac{1}{2}}$
 (4) 首項 1 ，公比 2 ，為發散 (5) 首項 0 ，公差 $-\log 2$ ，為發散

6. 坐標平面上， Γ_1 為 $y = \log_2 x$ 的圖形， Γ_2 為 $y = \log \frac{1}{2} x$ 的圖形。

下列關於 Γ_1 與 Γ_2 的敘述，試選出正確的選項：

- (1) Γ_1 的圖形凹口向下 (2) Γ_2 的圖形凹口向下 (3) Γ_1 的圖形均在 x 軸的上方
 (4) Γ_2 的圖形均在 y 軸的右方 (5) Γ_2 與 Γ_2 恰交於一點。 【106 數乙】

答：(1)(4)(5) **(第一冊第三章對數—對數函數圖)**

解：(2) 凹口向上 (3) 應在 y 軸右方

7. 小明參加某次國文、英文、數學、自然、社會五個科目的測驗，每一科的分數均為 $0 \sim 100$ 分。已知小明國英數三科的分數分別為 75 、 80 、 85 分。試問下列哪些選項會讓小明五科成績的平均不低於 80 分且五科標準差不大於 5 分？

(註：標準差 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$ ，其中 μ 為平均數。)

- (1) 自然 75 分，社會 80 分 (2) 自然與社會兩科皆 80 分 (3) 自然與社會的平均 85 分
 (4) 自然與社會兩科之和不低於 160 分且兩科差距不超過 10 分
 (5) 自然與社會兩科的分數都介於 80 與 82 分之間。 【106 數乙】

答：(2)(5) **(第二冊第四章數據分析—平均數、標準差)**

解：(1) $\mu = 79$ ，錯誤 (2) $\mu = 80$ 、 $\sigma = \sqrt{10}$ ，成立
 (3) 當自然、社會一為 100 ，一為 70 ， $\mu = 82$ 、 $\sigma = \sqrt{106}$ ，不成立
 (4) 當自然與社會均為 100 ， $\mu = 88$ 、 $\sigma = \sqrt{106}$ ，不成立 (5) 成立

三、選填題 (佔 18 分)

A. 平面向量 \vec{u} 和向量 \vec{v} 互相垂直，且 $\vec{u} - \vec{v} = (4, -7)$ 。若 \vec{u} 的長度為 6 ，則 \vec{v} 的長度為_____。 【106 數乙】

答： $\sqrt{29}$ **(第三冊第三章平面向量—內積)**

解： $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 \Rightarrow 65 = 36 - 0 + |\vec{v}|^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{29}$

B. 不等式 $x + y \leq 47$ 的所有非負整數解中，滿足 $x \geq y$ 的解共有_____組。 【106 數乙】

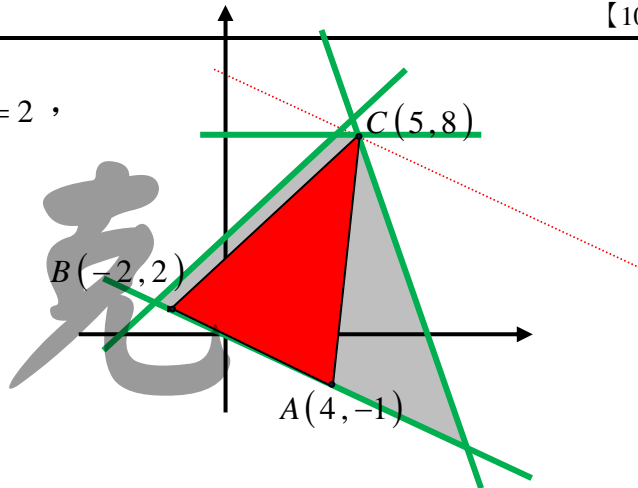
答： 600 **(第二冊第二章重複組合—非負整數解)**

$$\text{解：} \frac{H_{47}^3 - \underbrace{24}_{x=y=0,1,2,\dots,23}}{2} + \frac{\underbrace{24}_{x=y=0,1,2,\dots,23}}{2} = \frac{C_2^{49}}{2} + 12 = 600$$

C. 坐標平面上，有兩點 $A(4, -1)$ 與 $B(-2, 2)$ 。已知點 $C(x, y)$ 滿足聯立不等式 $x + 2y \geq 2$ 、 $x - y \geq -4$ 、 $y \leq 8$ 以及 $3x + y \leq 23$ ，則當 C 點坐標為 _____ 時， $\triangle ABC$ 有最大的面積。 【106 數乙】

答：(5, 8) (第三冊第二章線性規劃)

解：點 $A(4, -1)$ 、 $B(-2, 2) \in x + 2y = 2$ ，
限制範圍如右圖灰色區
當 $C(5, 8)$ 時， $\triangle ABC$ 有最大的高
亦即 $\triangle ABC$ 有最大面積



第貳部分：非選擇題 (佔 24 分)

- 一、某縣政府每週五對全縣居民發放甲、乙兩種彩券、每位居民均可憑身分證免費選擇領取甲券一張或乙券一張。根據長期統計，上週選擇甲券的民眾會有 85% 在本週維持選擇甲券、15% 改選乙券；而選擇乙券的民眾會有 35% 在本週改選甲券、65% 維持乙券。所謂穩定狀態，係指領取甲券及乙券的民眾比例在每週均保持不變
- (1) 試寫出描述上述現象的轉移矩陣。
(2) 試問領取甲券和乙券民眾各占全縣居民百分比多少時，會形成穩定狀態？

【106 數乙】

答：(1) $\begin{bmatrix} 0.85 & 0.35 \\ 0.15 & 0.65 \end{bmatrix}$ (2) (甲, 乙) = $\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right)$ (第四冊第三章矩陣—馬可夫矩陣)

解： $\begin{bmatrix} 0.85 & 0.35 \\ 0.15 & 0.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7y = 3x \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{10}, y = \frac{3}{10}$

- 二、袋中有紅色代幣 4 枚、綠色代幣 9 枚、以及藍色代幣若干枚。每一枚紅色、綠色、藍色代幣分別可兌換 50 元、20 元以及 10 元。現從袋中取出代幣，每一枚代幣被取出的機會均等。

設隨機變數 X 代表取出 1 枚代幣可兌換的金額(單位：元)；

隨機變數 Y 代表一次取出 2 枚代幣可兌換(單位：元)。

已知的期望值為 20。

- (1) 試問藍色代幣有多少枚？ (2) 試問 $Y \leq 50$ 的機率 $P(Y \leq 50)$ 為何？

【106 數乙】

答：(1) 12 (2) $\frac{7}{10}$ (第五冊第一章機率與統計—期望值)

解： $E(X) = \frac{4 \times 50 + 9 \times 20 + x \times 10}{4 + 9 + x} = 20 \Rightarrow x = 12$

$$P(Y \leq 50) = \frac{C_2^{21}}{C_2^{25}} = \frac{7}{10} \quad \text{或} \quad P(Y \leq 50) = 1 - \frac{C_2^4 + C_1^4 C_1^{21}}{C_2^{25}} = \frac{7}{10}$$