【數與式】

1. 數系($\mathbf{N}\subset \mathbf{Z}\subset \mathbf{Q}\subset \mathbf{R}$)

$$\Rightarrow 實數(R)\begin{cases} 有理數\ \mathbf{Q}\begin{cases} 整數\ \mathbf{Z}：(正整數\ \mathbf{N},\ 零,\ 負整數) \\ 分數：(有限小數,循環小數) \end{cases} \\ 無理數\ \mathbf{Q}^c：(不循環的無限小數) \end{cases}$$

2. 算幾不等式：$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$　　　【例】若 $3a+2b=12$，求 ab^2 的最大值=$\underline{\frac{64}{3}}$

3. 乘法公式

(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=\underline{(a+b)^3-3ab(a+b)}$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

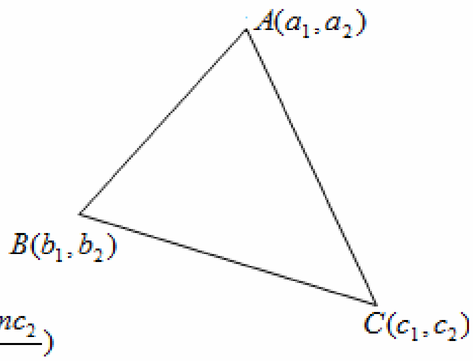
$\Rightarrow x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

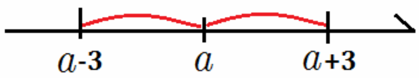
$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

4. 基本公式：

$$\begin{cases} (1)\ \overline{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} \\ (2)\ \Delta ABC\ 重心\ G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right) \\ (3)\ \Delta ABC=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 \end{matrix}\right\| \\ (4)\ 若\ \overline{AP}:\overline{PC}=m:n，則\ P\left(\frac{na_1+mc_1}{m+n},\frac{na_2+mc_2}{m+n}\right) \end{cases}$$



5. 絕對值：$|x-a|<3\ \Leftrightarrow\ \underline{(a-3)<x<(a+3)}$。



【多項式】

1. 直線方程式：

(1) 斜率 $\boldsymbol{m}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$　　　【例】若 $3x+2y-12=0$ 的斜率=$\underline{-\frac{3}{2}}$

(2)**點斜式**：過 $P(x_0,y_0)$，斜率為 m 之直線 L：$\underline{y-y_0=m\cdot(x-x_0)}$

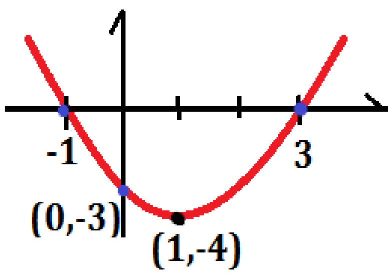
(3)**截距式**：x 軸截距 a，y 軸截距 b 之直線 L：$\underline{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$

(4)直線 $L:ax+by+c=0$，(1)若 $L_1 // L$，設 $\underline{L_1:ax+by+k=0}$　(2)若 $L_2\perp L$，設 $\underline{L_2:bx-ay+k=0}$

(5)聯立方程組(兩直線)$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的**解**與**圖形**關係：

解	恰一解(相容方程)	無限多解(相依方程組)	無解(矛盾方程組)
判別法	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$
幾何意義	平面上兩相交直線	平面上兩重合直線	平面上兩平行直線

2. 二次函數： **例**：$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$



(1)與 x 軸交點：(–1,0) , (3,0)

(2)與 y 軸交點：(0,–3)

3. (1)餘式定理：$f(x)$除以$(x-c)$的餘式 $r=f(c)$

(2)因式定理：若 $x-c$ 是 $f(x)$的因式，則 $f(c)=0$

【例】$12^5-7\cdot12^4-58\cdot12^3+16\cdot12^2-465\cdot12+100=$ 280

【例】$f(x)=x^{59}+7x^{22}-4x^8+5$ 除以 $x–1$ 的餘式= 9

4. 牛頓定理：若**整係數** $x^4+ax^3+bx^2+cx+40=0$ 有四個相異正整數根，求此四根。 Ans:1,2,4,5

5. 根與係數：若 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根 α,β

則 $\begin{cases}\text{兩根和}:\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ \text{兩根積}:\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$

$\boxed{\text{補}}$ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根 α,β,γ

則 $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$

【例】若 α,β 是 $x^2+6x+2=0$ 的兩根，求 (1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\alpha^3+\beta^3$ (3) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$

Ans:(1)32 (2)–180 (3)$-6-2\sqrt{2}$

6. 勘根定理：說明 $x^3-9x-10=0$ 在 3, 4 之間有實根

【答】因為 $f(3)\cdot f(4)<0$

7. 不等式：(1) $x^2-4x+3\geq0$ 答：$x\geq3$，$x\leq1$ (2) $x(x-1)(x-3)(x-5)>0$ 答：$x<0, 1<x<3, x>5$

(大分)

(小連)

【指數、對數】

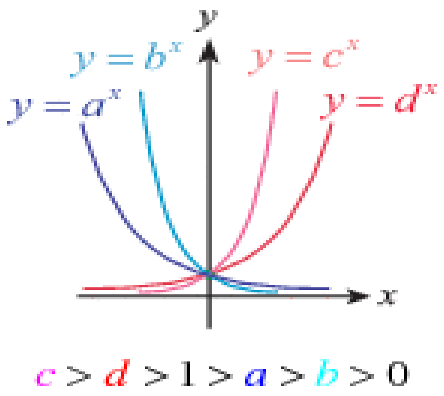
1. (1)負指數：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^{n}}$　　　(2)分數指數：設 $a>0$ ，則 $a^{\frac{1}{n}}=\underline{\sqrt[n]{a}}$

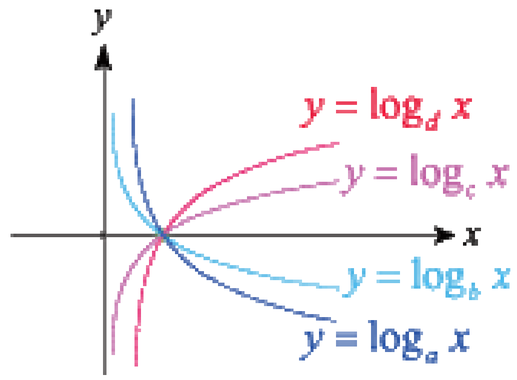
【例】設 $a>0$，$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2$，求 $a+a^{-1}=\underline{\ 6\ }$

【例】$0\le x\le 2$，求 $f(x)=-9^{x}+2\times 3^{x+1}+3$ 的最大值與最小值。　　　Ans:最大值 12，最小值−24

解：$f(x)=-[(3^{x})-3]^{2}+12$

2. 圖型：(1)指數 $f(x)=a^{x}$　　　(2)對數 $\boldsymbol{f(x)=\log_a x}$





3. (1) $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$　　　【例】求 $2\log\dfrac{5}{3}+2\log 3+\dfrac{1}{2}\log 49-\log\dfrac{7}{4}=\underline{\ 2\ }$

(2) $\log_a x-\log_a y=\log_a\dfrac{x}{y}$

(3) $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$

(4) $\log_a b=\dfrac{\log_x b}{\log_x a}$　　　【例】解 $\log x-6\log_x 10=1$　　Ans: $x=1000$ *or* $\dfrac{1}{100}$

(5) $a^{\log_a x}=x$

【例】某甲向銀行貸款 100 萬元，約定從次月開始每月還給銀行 1 萬元，依月利率 0.6%複利計算，則某甲需要__________年就可還清（$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}1.006=0.0026$）答案：13

【排列組合】

1. (1)階乘：$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$

(2)排列：$P^{6}_{3}=6\times 5\times 4$

(3)選取：$C^{6}_{3}=\dfrac{6\times 5\times 4}{3!}$

【例】甲、乙、丙、丁、戊，共五人排成一列，求下列方法數

(1)甲、乙、丙相鄰　　(2)甲、乙不相鄰　　(3)甲在乙前方，且乙在丙前方　　Ans:(1)36 (2)72 (3)20

解：(1) $3!\cdot 3!$　　(2) $3!\cdot[4\cdot 3]$　　(3) $5\cdot 4$ (丁戊選位就坐)

2. 重複組合：袋中有白、紅、藍球，取 5 個，共有 $\underline{H_5^{3種}=C_5^{5+3-1}}$ 種方法。

【統整題型】有 5 種不同的酒，倒入 3 個酒杯，求下列方法數：

(1)杯子不同，每種酒不限倒一次：5^3

(2)杯子不同，每種酒最多倒一次：P_3^5

(3)杯子相同，每種酒不限倒一次：H_3^5

(4)杯子相同，每種酒最多倒一次：C_3^5

(5)杯子不同，每種酒不限倒一次，且至少一杯為啤酒：5^3-4^3(沒啤酒)

Ans: (1)125 (2)60 (3)35 (4)10 (5)61

3. 二項式：$(a+b)^n=C_0^na^n+C_1^na^{n-1}b+C_2^na^{n-2}b^2+\cdots+C_{n-1}^nab^{n-1}+C_n^nb^n$

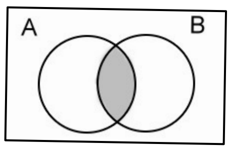
(1) $(x+1)^4=1\cdot x^4+4\cdot x^3+6\cdot x^2+4\cdot x+1$

(2) $C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n$　　※$C_0^n+C_2^n+C_4^n+\cdots=C_1^n+C_3^n+C_5^n+\cdots=\dfrac{2^n}{2}$

【例】$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$ 的展開式中，x^2 的係數為 $\underline{165}$

【機率統計】

1. 條件機率：在發生 A 事件下，B 發生的機率＝$P(B\,|\,A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$



2. 獨立事件：若 A ,B 事件獨立(彼此不相影響)　$\Rightarrow$　$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

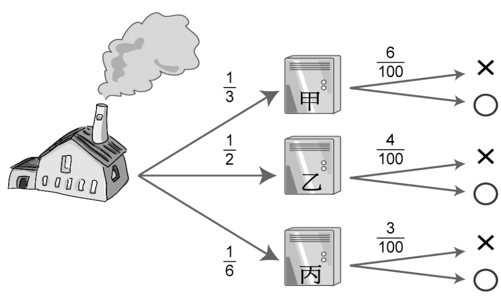
※若 A ,B 事件獨立 $\Rightarrow$　$P(B\,|\,A)=P(B)$

3. 貝式定理：【例】工廠有甲，乙，丙三機器，

產量占總產量的$\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{6}$。已知產品中甲有 6%，

乙有 4%，丙有 3%為不良品。今任選一產品，已知

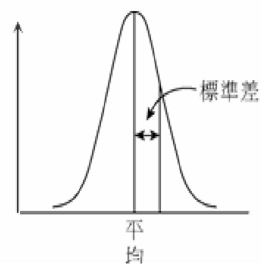
該產品為不良品，則此產品為甲機器所生產的機率為$\underline{\frac{4}{9}}$

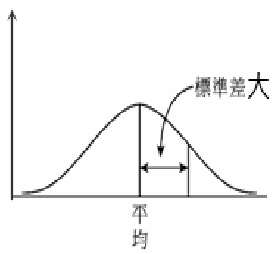


4. (1)期望值(平均 $\bar{x}$)： $E(x)=\frac{1}{n}\cdot[x_1+x_2+\cdots+x_n]=\underline{x_1\cdot p(x_1)}+\underline{x_2\cdot p(x_2)}+\cdots+\underline{x_n\cdot p(x_n)}$ [隨機]

(2)標準差 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}{n}}$

$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\cdot(x_i-\bar{x})^2}$ [隨機]





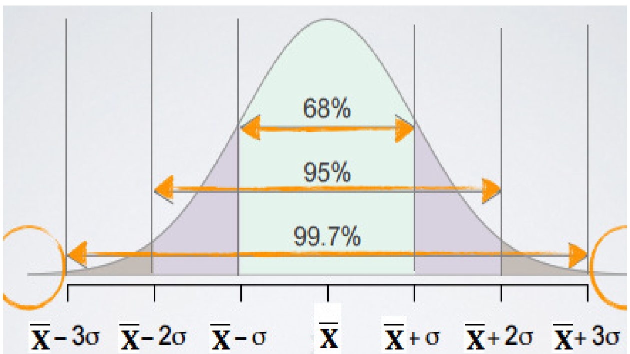
★性質：若 $y_i=ax_i+b$，則**(1)** $\bar{y}=a\bar{x}+b$ **(2)** $\sigma_y=|a|\cdot\sigma_x$

5. 二項分布 (n,p)：n 次獨立試驗中，恰 k 次成功的機率 $P(X=k)=C_k^n P^k\cdot(1-P)^{n-k}$

(1)期望值 $E(x)=np$

(2)變異數 $Var(X)=E(x^2)-[E(x)]^2=\underline{n\cdot p\cdot(1-p)}$ **※標準差** $\sigma=\sqrt{Var(X)}$

6. 常態分布(68—95—99.7 法則)



※ 信賴區間：

若 n 個樣本中，成功比率為 p，標準差 $\sigma=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

(1) 68 %信心水準的信賴區間 $\left[\bar{x}-\sigma\ ,\ \bar{x}+\sigma\right]$

(2) 95 %信心水準的信賴區間 $\left[\bar{x}-2\sigma\ ,\ \bar{x}+2\sigma\right]$

(3) 99.7 %信心水準的信賴區間 $\left[\bar{x}-3\sigma\ ,\ \bar{x}+3\sigma\right]$

7. 標準分數 $z_i=\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}$ (例如 **Z=1.5** 代表你分數比"**平均**"多 1.5 個標準差)

8. 相關係數 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\cdot S_{yy}}}$ ※(1) $-1\le r\le 1$ (2) $|r|$越大，相關程度越大

9. 迴歸直線 L：$\underline{y-\bar{y}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\cdot(x-\bar{x})}$ ※(1)直線 L 過 $\underline{(\bar{x},\bar{y})}$ (2)斜率 $m=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

【例】研究紙張的張力強度 Y (磅/平方英吋)和所含硬木比例 X (百分比)關係的實驗，得到如下 5 組數據：求(1)相關係數 (2) Y 對 X 的迴歸直線方程式 Ans：(1)0.725 (2) $y-30=\frac{290}{100}(x-8)$

X	3	4	7	11	15
Y	5	40	15	35	55

【直線與圓】

1. (1)點 $P(X_0,Y_0)$，直線 $L: ax+by+c=0$ $\Rightarrow$ **距離** $d(P,L)=\dfrac{|a\cdot X_0+b\cdot Y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

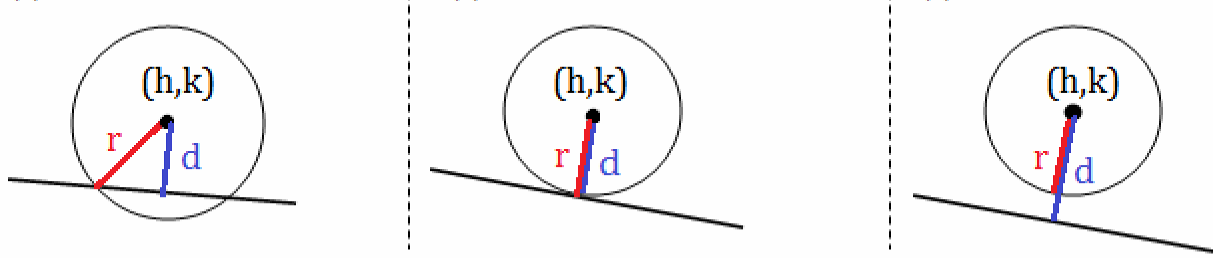
(2)兩平行線 $\begin{cases} L_1: ax+by+c_1=0 \\ L_2: ax+by+c_2=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ **距離** $d(L_1,L_2)=\dfrac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2. 圓心 (h,k)，半徑為 r $\Rightarrow$ 圓的標準式：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

3. 圓與直線的關係：直線 L：$y=mx+b$ 代入圓 C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$\Rightarrow$ 得二次式 $Ax^2+Bx+C=0$，判別式 $D=\sqrt{B^2-4AC}$

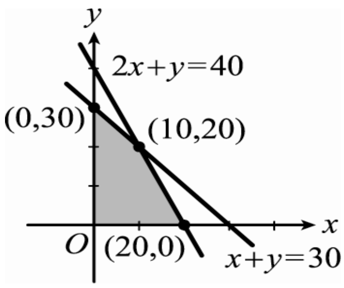
(1)交兩點：$D>0$　　**(2)**相切一點：$D=0$　　**(3)**相離：$D<0$



※圓心(h, k)與直線 $L: mx-y+b=0$ 的距離 $d=\dfrac{|m\cdot h-k+b|}{\sqrt{m^2+1}}$

3.線性規劃(必考)：

【例】兩種款式的毛織品，每件 A 款式需用紅色毛線 40 公尺，白色毛線 30 公尺，利潤 40 元；每件 B 款式需用紅色毛線 20 公尺，白色毛線 30 公尺，利潤 25 元。現有紅色毛線 800 公尺，白色毛線 900 公尺，全部均可使用，可得最大利潤多少元？　　Ans:900 元

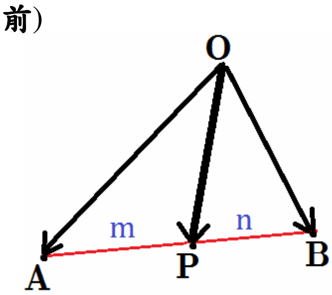


【平面向量】

1. 向量加減法：(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$　　(2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ **(後－前)**

2. 向量 $\overrightarrow{OP}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}$，若 P,A,B 共線 $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta=1$

※若 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{OB}$



3. 若 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$，則內積 $\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$

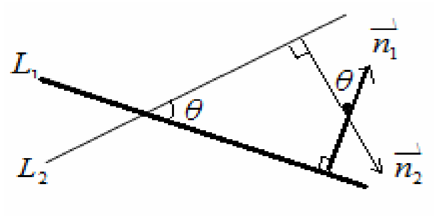
※**(1)** $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Rightarrow\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}=0$　**(2)** $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

4. 柯西：$\left(x_1^{\,2}+y_1^{\,2}\right)\left(x_2^{\,2}+y_2^{\,2}\right)\geq\left(x_1x_2+y_1y_2\right)^2$

【例】設 $2x+y=10$，求 x^2+y^2 的最小值，及此時 (x,y) 之值。 Ans:20 ,(4,2)

5. 法向量 $\overrightarrow{n}$：直線 $3x+4y-7=0$ 之法向量 $\overrightarrow{n}=$ <u>(3,4)</u>

※直線 L_1 與 L_2 的夾角 $\theta=\overrightarrow{n_1}$ 與 $\overrightarrow{n_2}$ 的夾角 θ



6. 行列式: $\begin{vmatrix}a & b\\ x & y\end{vmatrix}=ay-bx$　【例】若 $\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}=6$，求(1) $\begin{vmatrix}4a-3b & 6b\\ 4c-3d & 6d\end{vmatrix}$=<u>144</u>　(2) $\begin{vmatrix}7a & 3b\\ 14c & 6d\end{vmatrix}$=<u>252</u>

【矩陣】

1. 對角線矩陣 $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{bmatrix}$

2. 若 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 有反矩陣 A^{-1}，則 $\det(A)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$　$\Rightarrow$**反矩陣** $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

3. 若 $M=\begin{bmatrix}A & X\\ B & Y\end{bmatrix}$ 為**轉移矩陣**，則(1) $0\leq A,B,X,Y\leq 1$　(2) <u>$A+B=1$</u> 且 <u>$X+Y=1$</u>

【例】有一學生他的讀書習慣是：若他今晚讀書，則他明晚有 70%的機率不讀書；若他今晚不讀書，則他明晚有 50%的機率不讀書。若趨於穩定，則長期而言，他晚上讀書的機率為____．答案：$\dfrac{5}{12}$

【例】實係數二階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$．若 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$，求$(a,b,c,d)$

答案：(4, – 3,– 9,7)

【極限與函數】

1.等比數列：(1) $a_n=a_1\cdot r^{n-1}=a_5\cdot r^{n-5}$

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1\cdot r^{n-1}=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

(3)若 a,b,c 成等比，則等比中項 <u>$b=\pm\sqrt{ac}$</u>。

2.無窮等比 (1)當 $-1<r\le 1 \Rightarrow$ 數列 $\lim\limits_{n\to\infty} a_1\cdot r^{n-1}$ 收斂

(2)當 $-1<r<1 \Rightarrow$ 級數收斂 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1\cdot r^{n-1}=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{\text{首項}}{1-\text{公比}}$

3. (1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{1}{2}n^2+\cdots$ 【例】 $\sum\limits_{k=11}^{20} k^2 = \underline{2485}$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{1}{3}n^3+\cdots$

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=[\dfrac{n(n+1)}{2}]^2=\dfrac{1}{4}n^4+\cdots$

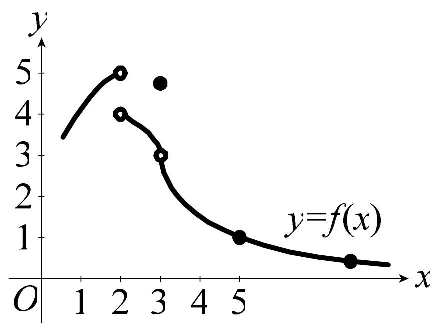
(4) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})\to 1$

【例】 $\sum\limits_{k=1}^{10}\dfrac{1}{k(k+2)}=\underline{\dfrac{175}{264}}$

【例】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{5^n}=$ __________ 答案：$\dfrac{13}{6}$

4. (1)極限值存在： $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

(2)函數連續： $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$



如圖：

(1) $x=2$ ： $\underline{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=5} \ne \underline{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4} \Rightarrow$ 極限值不存在

(2) $x=3$ ： $\underline{\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=3} \ne \underline{f(3)=5} \Rightarrow$ 極限值存在，不連續

(2) $x=5$ ： $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=f(5)=1 \Rightarrow$ 極限值存在，連續

【例】求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}=$ ________ 答案：$-\dfrac{1}{4}$

【例】已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+x+b}{x-1}=2$，則數對 $(a,b)=$ __________ 答案：$(\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2})$