

臺北市立景美女子高級中學 106 學年度第 1 次正式教師甄選

◎ 題目順序與原試題不盡相同，敬請見諒 ◎

1. $1 \sim 10000$ 的正整數，求各位數字和為 25 的數字有幾個？
2. $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \cos \theta - b_n \sin \theta \\ b_{n+1} = a_n \sin \theta + b_n \cos \theta \end{cases}$$
，已知 $a_1 = 1$ 、 $b_1 = \tan \theta$ ，求 $a_n = ?$ $b_n = ?$
3. $f(x)$ 是一個非負整數的多項方程式，且 $f(1) = 7$ 、 $f(7) = 3439$ ，求 $f(2) = ?$
4. 三個圓的半徑分別為 1、2、3 且兩兩相切，求與三圓同時相切的最小內切圓半徑？
5. 正 n 邊形，用 5 種顏色塗在邊上，同色不相鄰，不旋轉，不翻轉，方法數為 a_n ，則
 - (1) $a_3 = ?$ (2) $a_4 = ?$ (3) $a_5 = ?$ (4) $a_n = ?$
6. $0 \leq x, y \leq 360^\circ$ ，若 $\sin x \sin y + \sin x \cos y + \cos x \cos y + \cos x \sin y = 1$
當 $\cos(x-y)$ 有最小值時，求所有可能的 $(x, y) = ?$
7. a, b, c 為三角形的三個邊， $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ，試證
 - (1) $abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$ (2) $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ (3) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$
8. $\sqrt{49+a^2-7\sqrt{2}a} + \sqrt{a^2+b^2-\sqrt{2}ab} + \sqrt{50+b^2-10b}$ 求最小值 = ?
9. 已知 $a_1 = \sqrt{3}$ ， $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$ ，則
 - (1) 證明 $\sqrt{3} \leq a_n \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ (2) 證明 $a_n \leq a_{n+1}$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$
10. α 為方程式 $x^2 - x - k = 0$ 的一個正根， $a_1 > 0$ ， $a_{n+1} = \sqrt{a_n + k}$ ，則
 - (1) 證明 $|a_{n+1} - \alpha| \leq \frac{|a_n - \alpha|}{\alpha}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$
11. $f(x) = \int_1^x 4t(t+1)(t-2)dt$
 - (1) $f(x) = ?$ (2) $f(x)$ 最小值 = ? (3) 若 $f(x) = k$ 有四個相異根，求 k 的範圍？