新北市立高中職 100 學年度教師聯合甄選

數學科試題

一、選擇題：30%，每題 3 分

1. 假設矩陣 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$滿足 $a_{11}+a_{21}=a_{12}+a_{22}=1$，且 $B=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$，則下列哪一個矩陣各行元素的和不是 1？

   (A) AB　(B) $\frac{1}{2}(A+B)$　(C) $\frac{1}{2}(A+B)^2$　(D) $\frac{1}{2}(A^2+B^2)$

   Ans: C

2. 設 $p(x)=2x^3+ax^2+bx+c$，若 $p(x)=0$ 的三根之和、三根之積與各項係數的和均相等，且 $y=p(x)$ 的圖形與 y 軸交於 $(0,2)$，則 $b=$？

   (A) -8　(B) -6　(C) -4　(D) -2

   Ans: C

3. 在第一象限中的四邊形 $ABCD$，其中四個頂點分別為 $A(2,8)$，$B(0,0)$，$C(4,2)$，$D(x,y)$。 若 M，N，P，Q 分別為 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{DA}$ 的中點，且 $MNPQ$ 為正方形，則 $xy=$

   (A) 10　(B) 12　(C) 14　(D) 16

   Ans: B

4. 已知對所有的實數 k，圓 $C_k: x^2+y^2+(2k-8)x-(k+6)y+(9-10k)=0$ 都恆通過 A，B 兩點。若 M(a,b)為 $\overline{AB}$ 的中點，則 $a+b=$？

   (A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 10

   Ans: C

5. 已知 n^2-5n+6 為一質數，試問有多少個正整數 n 滿足所求？

   (A) 1　(B) 4　(C) 8　(D) 無限多個

   Ans: A

6. 設 $\sin 86° = a$ ， $\cos 63° = b$ ，則下列何者正確？

(A) $\sin 23° = b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2}$

(B) $\sin 31° = ab + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$

(C) $\cos 149° = b\sqrt{1-b^2} - a\sqrt{1-a^2}$

(D) $\tan 149° = \dfrac{a-b}{1+ab}$

Ans: B

7. 若一直圓柱的底半徑增加 20%，高減少 25%，則體積的變化為何？

(A) 增加 8%　(B) 減少 8%　(C) 增加 10%　(D) 減少 10%

Ans: A

8. 求 4444^{4444} 除以 9 的餘數為何？

(A) 1　(B) 3　(C) 5　(D) 7

Ans: D

9. 化簡 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\sqrt{7}}$ = ？

(A) $\dfrac{1}{7}$　(B) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$　(C) $\sqrt{7}$　(D) 7

Ans: A

10. 在坐標平面上，已知四邊形 $ABCD$ 的四個頂點 $A(-1,\ -3)$ ， $B(4,\ -1)$ ， $C(0,\ 5)$ ， $D(-1,\ -2)$ ，則四邊形 $ABCD$ 的面積為何？

(A) $\dfrac{29}{2}$　(B) 29　(C) $\dfrac{39}{2}$　(D) 39

Ans: C

二、簡答題(填充題)：30%，每題 6 分

1. 將編號 1，2，3，4，5 的五個球任意地投入 A，B，C 三個箱子，則 A，B，C 三個箱子均非空的機率為______。Ans: 50/81

2. 設 $f(x)$ 是一個四次多項式，已知 $f(x)$ 除以 $(x-1)^3$ 的餘式為 2， $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 -8 ， $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式為 8，則 $f(0)=$______ 。

Ans: -5/6

3. 已知 $f(x)=\sum_{k=1}^{11}(x-k)^2$ 與 $g(x)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot|x-k|$ 的最小值都發生在相同的 x，

則 $n=$______。Ans: 8

4. 設正五邊形的邊長為 1，則各對角線所圍成的正五邊形邊長為______。

Ans: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

5. 在坐標平面上，設曲線 $y=x+\frac{1}{x}$ 及兩直線 $x=2$，$y=2$ 所圍成的區域為 S，

則 S 的面積為______。Ans: $\ln 2-\frac{1}{2}$

三、申論題(計算題)：40%，每小題 10 分

1. (1)設 $f(x,y)=2x+5y^2$，試求在 $x^2+2y^2=1$ 的限制下，$f(x,y)$ 的最小值。

Ans: -2

(2)設 a,b 為正實數，滿足 $a+b=1$，試求 $ab+\frac{1}{ab}$ 的最小值。 Ans: 17/4

2. 已知四面體 $EFGH$ 的每個面都是邊長為 1 的正三角形，

(1)求兩向量 $\overline{EF}$ 與 $\overline{GH}$ 的夾角為多少度？Ans: $90°$

(2)求兩直線 EF 與 GH 的距離為何？Ans: $\frac{\sqrt{2}}{2}$