

數學能力檢定

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

1. 本試卷共二大題，選題 14 題，證明題 3 題。
2. 測驗時間從 10:40 到 12:00 共 80 分鐘。
3. 可利用試卷中空白部分計算，切勿在答案紙上計算。
4. 作答時不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。

一、單選題：14 題，每題 5 分，共 70 分

1. 已知 $a^2 + b^2 - 4a - 2b = -5$ ，求 $a^b \times b^a = ?$

- (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

2. 若 a, b 皆為二位數，且兩數之最大公因數為 8，最小公倍數為 96，求 $a + b = ?$

- (A) 48 (B) 56 (C) 64 (D) 104

3. 某校有四位同學自由參加 x 個社團，結果發現滿足下列兩個條件：

- (1) 每位同學恰參加了三個社團
 (2) 每兩位同學恰參加了一個共同的社團

則 x 值不可能為下列何者？

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

4. 從數字“1”起，將所有的整數數碼連續寫下，如 12345678910111213...，則第 2015 位的數碼為何？

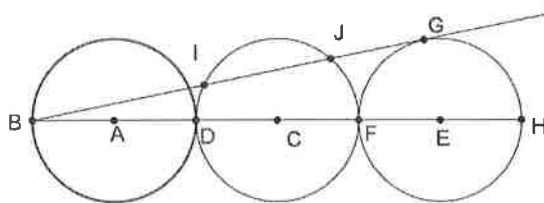
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 5

5. $2009 \times 2011 \times 2013 \times 2015 + 16$ 與下列何數相等？

- (A) 404731^2 (B) 404834^2 (C) 4047136^2 (D) 4048139^2

6. 如右圖，三個半徑 30 的圓相切於 D、F 兩點，若 \overline{BG} 切圓 E 於 G 點且交圓 C 於 I、J 兩點，求 $\overline{JI} = ?$

- (A) 36 (B) 40 (C) 45 (D) 48



7. 同時投擲大、中、小 3 粒骰子，出現的點數分別為 x, y, z ，當 $\frac{180^\circ}{x}, \frac{180^\circ}{y}, \frac{180^\circ}{z}$ 可為

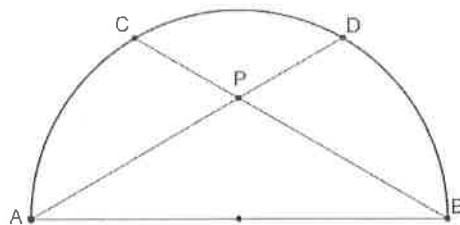
等腰三角形或直角三角形的三內角時，序組 (x, y, z) 共有幾組？

- (A) 3 (B) 6 (C) 10 (D) 13

8. 某公司生產多種款式的「豪小子」公仔，各種款式只是球衣或球褲選擇不同，其中球衣有白、灰、藍、綠四色，區分長、短袖，共八種選擇；而球褲有黑、綠、藍、紅四色的短褲可選。公司決定綠色的球褲不搭配短袖的球衣，而白色的球衣必搭配綠色或藍色的球褲，至於其他情況間的搭配就沒有限制，試問最多可搭配出多少種不同款式的「豪小子」公仔？

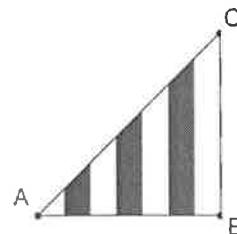
- (A) 21 (B) 24 (C) 25 (D) 28

9. 右圖為一半圓形框架的舞台， C 、 D 為半圓弧上的三等分點，直徑 $\overline{AB}=100$ (公尺)，雷射光由 A 、 B 兩處分別射向 D 、 C ，試問在空中交會的 P 點距底部 \overline{AB} 有多少公尺？



- (A) 30 (B) $\frac{75}{2}$ (C) $\frac{50}{3}\sqrt{3}$ (D) $20\sqrt{3}$

10. 藝術家將一三角形牆面的兩邊 \overline{AB} 與 \overline{AC} 邊各 7 等分，依序將兩邊的等分點連接，所形成的長條以黑、白油漆相間塗色(如右圖)，試問黑色與白色區域的面積比？



- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{15}{16}$

11. 設函數滿足 $f(1-x) = f(1+x)$, $f(6-x) = f(6+x)$ 且 $f(0) = 0$ ，當 $0 \leq x \leq 2015$ 時，方程式 $f(x) = 0$ 最少有幾個根？

- (A) 6 (B) 403 (C) 1008 (D) 1615

12. 象棋大賽有若干人參加，規則是任兩個人皆須下一局，勝者得 2 分，敗者得 0 分，平手時各得 1 分，現有四位觀眾計算所有參賽者得分之總和，依序為 1722, 2393, 2865 及 3108。已知恰有一位是對的，求正確的得分總和為何？

- (A) 1722 (2) 2393 (C) 2865 (D) 3108

13. 將

$$\frac{2}{1 \times (1+2)} + \frac{3}{(1+2) \times (1+2+3)} + \frac{4}{(1+2+3) \times (1+2+3+4)} + \cdots + \frac{100}{(1+2+3+\cdots+99) \times (1+2+3+\cdots+100)}$$

化為小數後，求小數點後第一位數字為？

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 0

14. 設 S_n 為等差級數前 n 項之和 ($n > 6$)，若 $S_6 = 36$ ， $S_n = 324$ ， $S_{n-6} = 144$ ，求 $n = ?$

- (A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 36

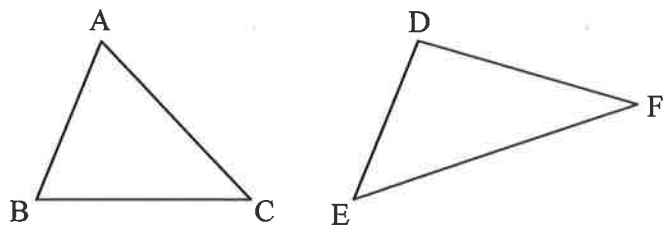
二、證明題：3題，每題10分，共30分

(給分原則是依據思考邏輯的嚴謹性與表達的清晰完整性)

1. a 、 b 為兩正數，試證： $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

2. 證明樞紐定理：

如右圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，
已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\angle A < \angle D$ ，
求證 $\overline{BC} < \overline{EF}$



3. 如右圖，四邊形 ABCD 中，已知 $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ，
求證：A、B、C、D 四點共圓

