

105 台大資工第二階段數學筆試

A 部分

1. $f(x)$ 為二次多項式， $f(0) = a$ ， $f'(0) = b$ ， $f(1) = c$ ，且 $c - a - b > 0$ ，求 $\min f(x)$

2. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ， $x = x^*$ 時有最小值， $e(x) = \frac{1}{2}(x - x^*)a(x - x^*) = ?$ ，以 $f(x)$ 、 $f(x^*)$ 表示

3. 已知 $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ ， $\arctan \theta$ 為 $\tan \theta$ 之反函數
 $\sec^2(\arctan x) = ?$ (與 x 有關的式子)

$$4. \begin{cases} C(1 - \epsilon) - x(C + \mu) & , x < 1 - 2\epsilon \\ \frac{C}{4\epsilon}(1 - x)^2 - x\mu & , 1 - 2\epsilon \leq x \leq 1 \\ -x\mu & , x > 1 \end{cases}$$

已知 $0 < \epsilon \leq 1$ ， $-C \leq \mu \leq 0$ ，是否 $f(x)$ 最小值 $= -\infty$ ？若否為何？
以 C 、 μ 、 ϵ 表示

$$5. P \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \text{ 求任何一個 } P$$

6. 已知 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = n^3 + 3n + 1$ ，求 a_n 以一般式表之
(前幾項 n 不合另外寫)

7. 擲三骰子一次，在至少一個 4 的條件下，點數和為偶數的機率？

$$8. M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{求 } M_1^{-1} \times M_2^{-1} \times M_3^{-1} = ?$$

$$9. f(x) = (6x^2 + 7x)^4, f'(x) = ?$$

$$10. f_1(x) = |x|$$

$f_2(x) = (\max(0, 1-x))^2$ $\max(0, 1-x)$ 指取 0 和 $(1-x)$ 中較大者
有哪些 x 滿足以下條件：

若 $f_1(y) \leq f_1(x)$ ， $f_2(y) \leq f_2(x)$ ，則 $x = y$

意指找不到除了 x 以外的答案滿足 $f_1(y) \leq f_1(x)$ ， $f_2(y) \leq f_2(x)$

B 部分

1. 有一偶函數 $f(x)$ ，已知 $f(x+2) = \frac{-1}{f(x)}$ ，且當 $2 \leq x \leq 3$ 時， $f(x) = x$ ，
求 $f(7.7)$
2. 有三球隊 A、B、C 共 58 人，可重複參加，A 有 38 人，B 有 15 人，C 有 20 人，三者皆參加者有 3 人，參加兩隊的共有幾人？
3. 一數列 $a_1 = \frac{1}{5}$ ， $a_{n+1} = \frac{1}{4a_n - 1}$ ， $n \geq 1$ ，求 $a_n = ?$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{4k^2 - 1} = ?$
5. 已知 $a^2 + ab + ac + bc = 6 + 2\sqrt{5}$ ， $a, b, c > 0$ ，求 $3a + b + 2c$ 最小值=？

6. ΔABC ，已知 $(a - c)(\sin A + \sin C) = (a - c) \sin B$

(1) 求角 $C = ?$

(2) $\sin A \sin B$ 最大值為？

7. $\sin 2(\alpha + \gamma) = n \sin 2(\beta)$ ，求 $\frac{\tan(\alpha + \beta + \gamma)}{\tan(\alpha - \beta + \gamma)} = ?$ (以 n 表示)

8. 一動直線過 $(1, 3)$ ，與圓 $x^2 + y^2 = 4$ 交的兩點之兩切線交點為 Q ，求動點 Q 的軌跡方程式？

9. 已知 $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ，求 $\sum_{k=1}^n k^2 C_k^n = ?$

10. $P(x)$ 為整數 x 由連續整數加成的方法數，如 $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 4 + 5 + 6 = 7 + 8 = 15$ ， $P(15) = 4$ ，求 $P(1050) = ?$