

張進通許世賢教育事務基金會 105 學年度雲嘉南區國中數學能力競試—數學一試題

一、填充題：每題 4 分，共 76 分。

乘法公式、合成函數的定義請看第四頁附錄

1. 設 x, y 為任意實數，定義一個新的運算符號“ \otimes ”，使得 $x \otimes y = a^2x + b^2y$ ，其中 a, b 為常數；已知 $1 \otimes 2 = 3, 2 \otimes 1 = 5$ ，則滿足 $(3 \otimes t) \otimes 5 = 7 \otimes t$ 的 t 值為_____。

2. 若 $f(x) = \frac{2016}{1+x}$ ，則 $f(1) + f(4) + f(7) + f(10) + f(13) + f(16) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{7}) + f(\frac{1}{10}) + f(\frac{1}{13}) + f(\frac{1}{16}) =$ _____。

3. 求 $\frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}} =$ _____。

4. 已知 a, b, c 為正數，且 $a^2 = 2, b^3 = 3, c^5 = 5$ ，試比較 a, b, c 三數的大小_____。

5. 絕對值方程式 $||x| - 1| - 1| = 1$ 有_____個解。

6. 已知 $x^2 - 4x + (2a - 10) = 0$ 的兩根皆大於 1，則實數 a 的範圍為_____。

7. 設 $a = \frac{2016^{20}}{2016^{10} + 12}$ ，則 a 的整數部分中的個位數字為_____。

8. 已知一數列：2, 5, 7, 12, 19, 31, ... (第一項是 2，第二項是 5，從第三項開始，每項恰好是它前面兩項之和)，則這個數列的第 2016 個數除以 5 的餘數為_____。

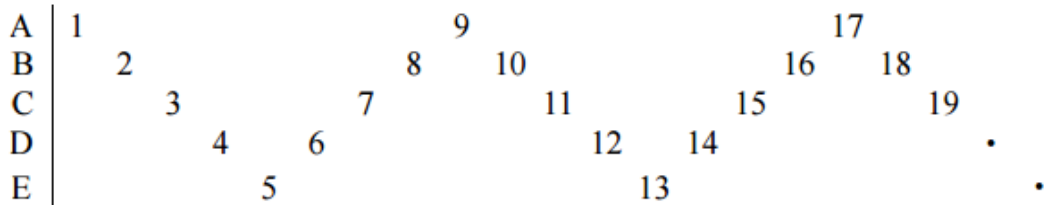
9. 有 8 張寫著編號 1 號至編號 8 號的卡片，將卡片數字面朝下蓋著，任意翻開一張卡片，並擲一粒公正骰子，試問“所翻開卡片上的數字與骰子出現的點數乘積為一個“完全平方數”的機率為_____。

10. 設 x, y 為實數滿足： $\begin{cases} x + y = 1 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 117 \end{cases}$ ，則 $x^4 + y^4 =$ _____。(乘法公式請參閱附錄 1)

11. 從 -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 中任取不重複的 5 個數字，取出的 5 個數字之中位數及算術平均數均為 0 的情形共有_____種。

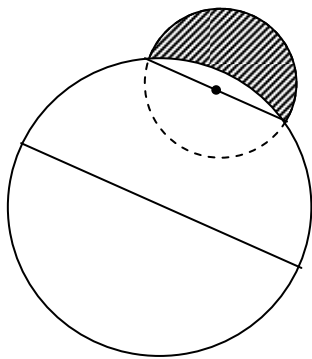
12. 將密碼 1304 的各位數字做以下動作可得新密碼：乘以 3 再加上 1，再取其個位數。亦即 $1 \times 3 + 1 = 4$ ，取個位數為 4；
 $3 \times 3 + 1 = 10$ ，取個位數為 0； $0 \times 3 + 1 = 1$ ，取個位數為 1； $4 \times 3 + 1 = 13$ ，取個位數為 3，此時新密碼為 4013。
 若按照此一規則，新密碼的各位數字可操作以下算式得到原始密碼：先加上 a ，再乘以 b ，之後取其個位數。其中 a, b
 皆為 1 至 9 之正整數，則數對 $(a, b) =$ _____。

13. 將正整數依照下圖的方式排列成五列寬的鋸齒狀：

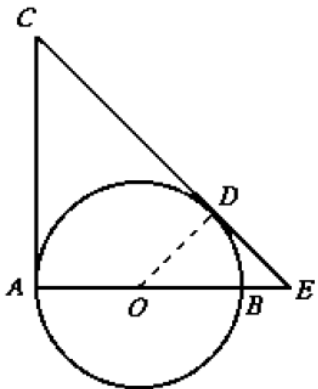


請問數 2016 將出現在哪一列 _____。

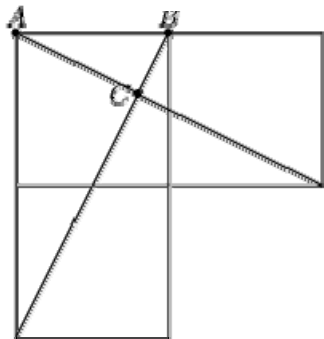
14. 如右圖所示，一個直徑為 1 的半圓坐落在一個直徑為 2 的半圓上方，則稱“位於小圓內且在大圓外的陰影區域”為一新月形(其中 O 點為小圓圓心)，試問此新月形的面積為_____。



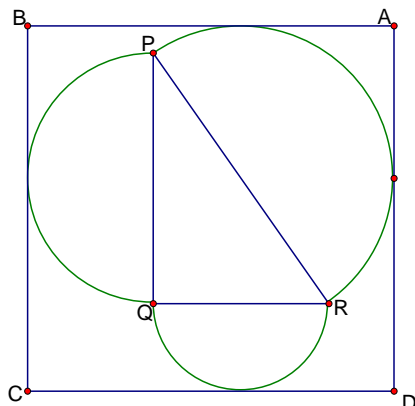
15. 如右圖， O 為圓心， \overline{AB} 為圓的直徑， \overline{CA} 與 \overline{CE} 分別切圓於 A 與 D 。若 $\overline{AB} = 38$ ，且 $\triangle ODE$ 的周長為 76，則 $\triangle ACE$ 的周長為_____。



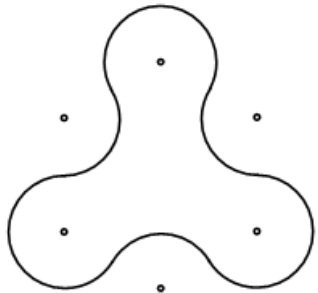
16. 已知右圖是由三個邊長為 1 的正方形所組成，則 $\triangle ABC$ 的面積為_____。



17. 如右圖，一直角三角形 PQR ，直角在 Q 點，以其三邊為直徑作三個半圓。矩形 $ABCD$ 的各邊與半圓相切，且 \overline{AB} 平行 \overline{QR} ， \overline{BC} 平行 \overline{PQ} 。若 $\overline{PQ} = 8$ ， $\overline{QR} = 6$ ，則矩形 $ABCD$ 面積為_____。

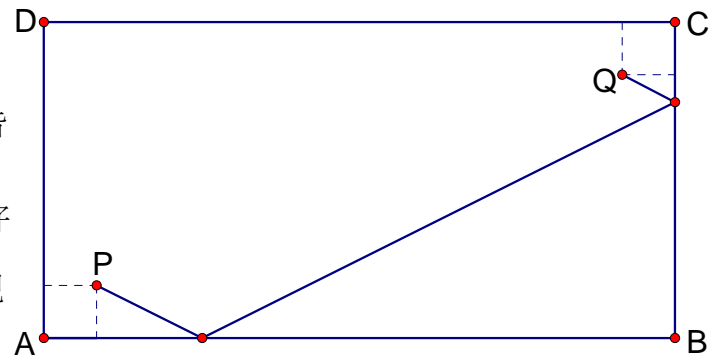


18. 右圖中的曲線是由 9 個全等的圓弧所組成的，各段弧長都是 $\frac{2\pi}{3}$ ，這些弧對應的圓心(以 \bullet 表示)可形成一個邊長是 2 的正六邊形的頂點。試問此曲線所圍區域的面積為_____。



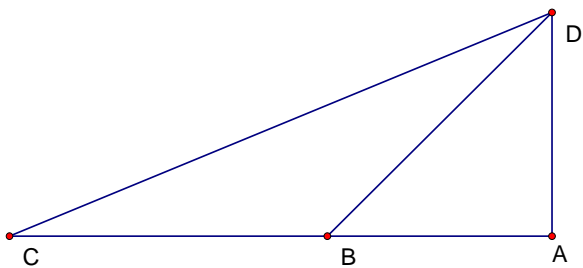
19. 如右圖，一矩形撞球檯 $\overline{AB} = 240$ 公分， $\overline{AD} = 120$ 。

今有兩球分別在 P 、 Q 之處，且 P 到 \overline{AB} 、 \overline{AD} 及 Q 到 \overline{BC} 、 \overline{CD} 皆為 20 公分。若 P 球撞擊球檯邊 \overline{AB} 反射後又撞擊 \overline{BC} ，反射後恰好撞擊到 Q 球，則 P 球的總行徑路線為_____公分。(將球視為質點)

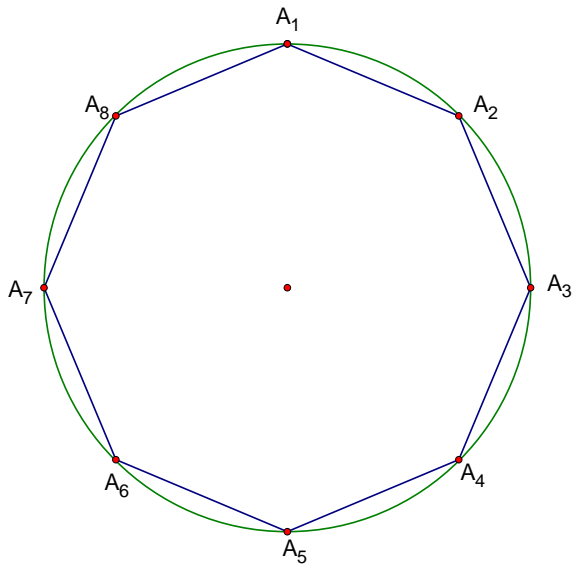


二、計算證明題：(共 24 分)

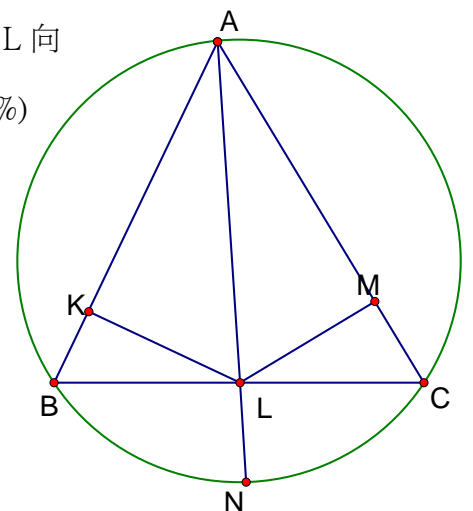
1. (1) 如下圖，等腰直角三角形 ABD ， $\angle A = 90^\circ$ ，若 $\overline{BD} = \overline{BC}$ ，且 $\overline{AB} = 1$ ，則 $\overline{CD}^2 = ?$ (4%)



(2) 由(1)的結果可知直角三角形 ACD 三邊長比例，設 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ 依序為單位圓(半徑長是 1 的圓)上的八等分點，則(a) $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} \cdot \overline{A_1A_5} \cdot \overline{A_1A_6} \cdot \overline{A_1A_7} \cdot \overline{A_1A_8} = ?$ (4%) (b) $\Delta A_1A_3A_6$ 的面積 = ? (6%)



2. 在銳角三角形 ΔABC 中， $\angle A$ 的角平分線交 \overline{BC} 於 L ，交 ΔABC 的外接圓於 N 。自點 L 向 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 作垂直線，垂足分別為 K, M ，試證明四邊形 $AKNM$ 與 ΔABC 面積相等。(10%)



附錄：

1. 乘法公式：

$$(1) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(3) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$(4) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$(5) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\Rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$(6) a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(7) a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. 函數的合成：給定函數 f 與 g ，定義 f 與 g 的合成函數 $g \circ f$ 為 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

例：已知函數 $f(x) = 3x + 2$ 與 $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ ，

$$\text{則 } g(f(x)) = g(3x+2) = \frac{1}{3}(3x+2) - \frac{2}{3} = x \circ$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) + 2 = x \circ$$

$$f(f(x)) = f(3x+2) = 3(3x+2) + 2 = 9x + 8 \circ$$