

張進通許世賢教育事務基金會 105 學年度雲嘉南區國中數學能力競試—數學二試題

一、填充題：第 1-8 題每題 4 分，第 9-16 每題 5 分，共 72 分

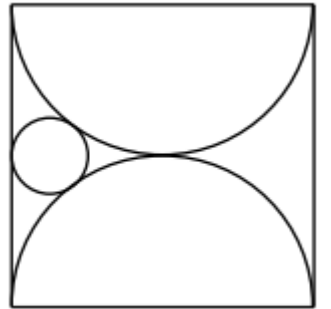
乘法公式、合成函數請看第三頁附錄

1. 設 m, n 為正數，且滿足 $\frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m+n}$ ，則 $\frac{n}{m} + \frac{m}{n}$ 的值為_____。
2. 若實係數方程式 $x^2 + a(a+1)x + a - 1 = 0$ 與 $x^2 + (a-1)x + a(a+1) = 0$ 恰有一共同實根，則 $a =$ _____。(兩解)
3. 若實係數方程式 $x^2 - (a+8)x + 8a - 1 = 0$ 有相異整數根，則此兩根為_____。
4. 定義 $[x]$ 為不大於 x 的最大整數，例如 $[2.3] = 2$, $[-3.1] = -4$, $[2] = 2$, $[-2] = -2$...，則 $x^2 - 3[x] + 1 = 0$ 的解為_____。(兩解)
5. 已知 m, n, p, q 為 4 個相異的正整數且滿足 $(7-m)(7-n)(7-p)(7-q) = 4$ ，則 $7m + 7n + 7p + 7q$ 的值為_____。
6. 試求一個最小的正整數 N ，使它的 $\frac{1}{2}$ 是平方數， $\frac{1}{3}$ 是立方數， $\frac{1}{5}$ 是五次方數，則 $N =$ _____。(將 N 表示成質因數的連乘積)
7. 有一個四位數 $abcd$ ，其中 a, b, c, d 為 0~9 的數字，但 $a \neq 0$ ，若 $abcd \times 9 = dcba$ ，其中 $dcba$ 也是四位數，則原四位數 $abcd$ 為_____。
8. 有一函數 $f(n) = \begin{cases} n+3, & n \text{ 為奇數} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ 為偶數} \end{cases}$ ，其中 n 是正整數。若已知一奇數 k 使得 $f(f(f(k))) = 27$ ，則 $k =$ _____。
(合成函數定義請參閱附錄 2)
9. 已知聯立方程組 $\begin{cases} a^3 + 3ab^2 = \frac{109}{8} \\ b^3 + 3a^2b = \frac{117}{4} \end{cases}$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。(乘法公式請參閱附錄 1)
10. 一個五位數中，其相鄰的兩數字都相差 3，則這樣的五位數共有_____個。
11. 設 n 為正整數，若直線 $nx + (n+1)y = \sqrt{2}$ 與兩坐標軸所圍成的面積為 S_n ($n = 1, 2, \dots, 2016$)，則 $S_1 + S_2 + \dots + S_{2016} =$ _____ (化為最簡分數)。

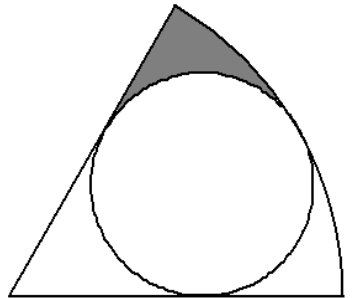
12. 已知 $S = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots111}_{2002 \text{ 個數字}}$ ，則 S 的最後 5 個數字為_____。

13. 有一個數列具有下列規則: 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6, ……，則此數列的第1000項為_____。

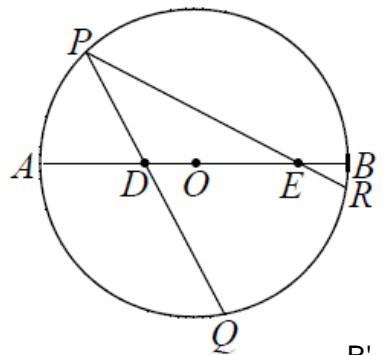
14. 如右圖，邊長為 80 cm 的正方形內有兩個相切於正方形的中心的半圓，另有一個小圓同時與正方形和兩個半圓都相切。則這個小圓的半徑為_____。



15. 如右圖，有一半徑為 6，圓心角為 60 度之扇形，有一小圓內切於此扇形，試求陰影部分面積為_____。



16. 如右圖， O 為圓心，半徑為 3， D, E 為直徑 \overline{AB} 上兩點， $\overline{OD} = 1$ ， $\overline{OE} = 2$ 。已知弦 \overline{PQ} 過 D 點，弦 \overline{PR} 過 E 點，且 $\overline{PQ} = \overline{PR}$ ，則 $\overline{PQ} =$ _____。



二、計算證明題：共 28 分

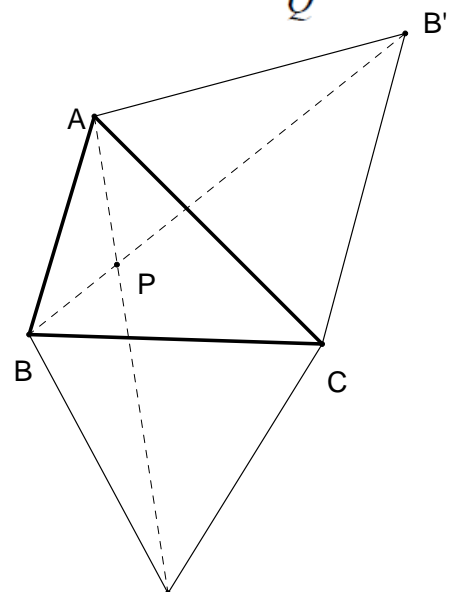
1. 對於每一內角皆小於 120 度之三角形 ABC ， P 為三角形內一點，使得 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 有最小值的 P 點稱為費馬點。

已知費馬點可由以下做法得到：

分別以 \overline{AC} 及 \overline{BC} 為一邊向三角形外部做正三角形 $AB'C$ 及 $A'BC$ ，連接 $\overline{BB'}$ 及 $\overline{AA'}$ ，則 $\overline{BB'}$ 及 $\overline{AA'}$ 的交點即為所求。

(1) $\angle APC =$ _____ (4%)

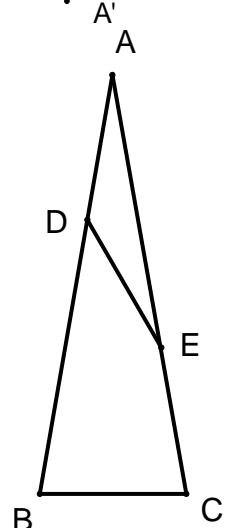
(2) 若三角形 ABC 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 6$ ， $\overline{BC} = 6\sqrt{2}$ ， P 為三角形 ABC 之內部一點，試求 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 的最小值。(10%)



2. 如圖：有一三角形 ABC ，其中 $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EC} = \overline{BC}$ ， $\overline{AE} = \overline{DB}$ ，則

(1) $\angle A =$ _____。(4%)

(2) 試證明(1)之結果(10%)



附錄：

1. 乘法公式：

$$(1) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(3) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$(4) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$(5) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\Rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$(6) a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(7) a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. 函數的合成：給定函數 f 與 g ，定義 f 與 g 的合成函數 $g \circ f$ 為 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

例：已知函數 $f(x) = 3x + 2$ 與 $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ ，

$$\text{則 } g(f(x)) = g(3x+2) = \frac{1}{3}(3x+2) - \frac{2}{3} = x \circ$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) + 2 = x \circ$$

$$f(f(x)) = f(3x+2) = 3(3x+2) + 2 = 9x + 8 \circ$$