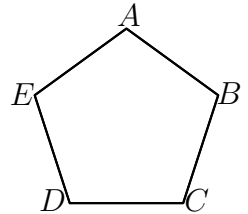


台北市立松山高級中學 105 教師甄選初試數學科試題(非官方版本)

一、填充題 (每格5分, 共40分)

- 若方程式 $mx + 3|x + 4| - 2 = 0$ 無解, 求實數 m 的範圍?
- 袋中有一顆黑球, 兩顆白球, 每一輪的操作都是先從袋中取出一球, 取後不放回, 然後再放入一顆黑球, 求第五輪後袋中有三顆黑球的機率?
- 擲一粒骰子, 從正五邊形的 A 點順時針出發, 向相鄰頂點移動一個邊稱為前進一步, 設第 k 次投擲, 所擲的骰子點數為 n_k , 且第 k 次投擲後抵達的頂點為 P_k 。例如: $n_1 = 3, n_2 = 2$, 代表 $P_1 = D, P_2 = A$ 。求 P_1, P_2, P_3 皆在不同頂點的機率為何?
- 寶可夢麵包店, 根據以往的經驗, 其產品皮卡丘麵包的銷售個數機率如下表。每一個皮卡丘麵包的成本為 300 元, 賣出可得 700 元, 若當天賣不完的皮卡丘麵包必須丟掉, 則每天應該生產幾個皮卡丘麵包, 才会有最大利潤?



銷售個數 x	7	8	9	10
機率 $P(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

- 座標平面上原點 O , 已知 $|\overrightarrow{OA}| = 2, |\overrightarrow{OB}| = 3$, 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3, \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, 求 $|\overrightarrow{OC}|$ 的範圍?
- 已知 $n \in \mathbb{N}$, 且 $f(n) + f(n - 5) = n^2$, 若 $f(95) = 95$, 求 $f(30)$ 之值為何?
- 實數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 滿足下面兩個條件
 - 若從 n 個數任挑 2 個出來相加並計算, 把所有可能都取遍, 得 $\sum_{i < j} (a_i + a_j) = 91$
 - 若從 n 個數任挑 3 個出來相加並計算, 把所有可能都取遍, 得 $\sum_{i < j < k} (a_i + a_j + a_k) = 273$

試求 $\sum_{i=1}^n a_i$ 之值為何?

- 若 $\sum_{k=1}^{2016} \left[\frac{(2016)^{3k} + 1}{(2016)^k - 1} \right]$ 以十進位表示, 則其個位數字為何, 其中 $[]$ 為高斯符號。

二、計算證明 (每題10分, 共60分)

- 已知空間中兩條歪斜線的對稱比例式,

$$L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z+2}{1}, \quad L_2: \frac{x+9}{4} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{2}$$

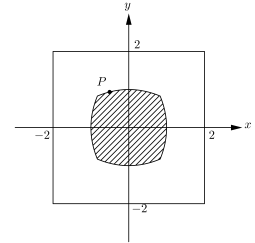
請用兩種方法求出公垂線的直線方程式。

2. $\triangle ABC$ 中, 若 $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 5$, $\overline{BC} = 7$, 三角形內部有一點 P 在 $\angle CAB$ 的角平分線上, 從 P 點做垂線交 \overline{BC} 於 D , 則 $\overline{AP}^2 + \overline{PD}^2$ 的最小值為何?

3. 有一拋物線 $y = x^2 - 4x + 3$ 交 x 軸於 A 、 B 兩點, 若有一動點 P 在直線 $x + y = 5$ 上, 當 $\angle APB$ 有最大值時, 此時的 P 點座標為何?

4. 已知 a, b, c 為正實數, 證明 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

5. 正方形內部一點 P , 其中 P 到原點的距離小於 P 到正方形邊上的距離, 試求滿足其條件的所有點形成的區域面積為何?



6. 證明: 三角形三條高的垂足 D, E, F , 三邊的中點 N, P, S , 以及頂點到垂心的三條線段的中點 G, I, M , 此九點共圓。

