

臺北市立木柵高級工業職業學校 105 學年度第 2 次代理教師甄選

數
學
科
試
題
本

臺北市立木柵高級工業職學校 105 學年度第 2 次

代理教師甄選數學科試題

◎計算證明題：請詳細列出相關計算證明過程，僅有答案不予計分，並請標示出該題答案，

每題 10 分，共 100 分

1、請證明下列有關直線斜率的性質：

- (1) 兩平行線（斜率皆存在）斜率相等
- (2) 兩直線垂直時（斜率皆存在），斜率相乘 $= -1$

2、請在空間坐標系中證明科西不等式，並說明等號成立的條件

3、請證明正弦定理，同時說明與三角形外接圓半徑的關係

4、設 $p(x)$ 為三次實係數多項式函數，其圖形通過 $(1,3), (-1,5)$ 兩點。若 $p(x)$ 的圖形在點 $(1,3)$ 的切線斜率為 7，而在點 $(-1,5)$ 的切線斜率為 -5 ，試求 $p(x)$

5、傳說中孫悟空的「如意金箍棒」是由「定海神針」變形得來的。這定海神針在變形時永遠保持為圓柱體，其底圓半徑原為 12 公分且以每秒 1 公分的等速率縮短，而長度以每秒 20 公分的等速率增長。已知神針之底圓半徑只能從 12 公分縮到 4 公分為止，且知在這段變形過程中，當底圓半徑為 10 公分時其體積最大。
(1) 試求定海神針原來的長度 (2) 假設孫悟空將神針體積最小時定形成金箍棒，試求金箍棒的長度

6、設 R 代表坐標平面上由下列兩個不等式所定義的區域，

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

求函數 $x+y$ 在區域 R 上的最大值與最小值

7、設四次多項式 $f(x) = x(1-x)(1+x^2)$

(1) 選取積分區間 $a \leq x \leq b$ ，使得定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 達到最大值，並求此最大值

(2) 設 $c > 0$ ，求證 $\int_{-c}^c f(x) dx$ 恆為負值

8、設 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 54$ 為坐標空間中一球面； L 為坐標空間中通過點 $P(0, -6, 9)$ 且方向向量為 $(1, 4, -2)$ 的直線，

(1) 試求 L 與 S 的所有交點之坐標。

(2) 在所有包含 L 的平面與 S 相交所得之圓中，如何確定所交圓的面積最大？此面積最大值为

何？

(3) 在所有包含 L 的平面中，如何找出與 S 相交所得之圓面積最小者？其平面方程式為何？

9、設 $p(x)$ 為一實係數多項式，其各項係數均大於或等於 0。在坐標平面上，已知對所有的 $t \geq 1$ ，函數 $y = p(x)$ 、 $y = -1 - x^2$ 的圖形與直線 $x = 1$ 、 $x = t$ 所圍成有界區域的面積為 $t^4 + t^3 + t^2 + t + C$ （其中 C 為常數）。

(1) 試說明 $p(x) > -1 - x^2$ 對所有的 $x \geq 1$ 均成立

(2) 設 $t \geq 1$ ，試求 $\int_1^t (-1 - x^2) dx$

(3) 試求 C

(4) 試求 $p(x)$

10、設三次實係數多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 a ，已知在 $0 \leq x \leq 3$ 的範圍中， $f(x)$ 的最大值 12 發生在 $x = 0, x = 2$ 兩處，另一多項式 $G(x)$ 滿足 $G(0) = 0$ ，以及對任意實數 $s, r (s \leq r)$ ， $\int_s^r f(t) dt = G(r) - G(s)$ 恆成立，且函數 $y = G(x)$ 在 $x = 1$ 處有（相對）極值，

(1) 試描繪 $y = f(x)$ 在 $0 \leq x \leq 3$ 可能的圖形，在圖形上標示 $(0, f(0)), (2, f(2))$ ，並由此說明 a 的正負

(2) 試求方程式 $f(x) - 12 = 0$ 的實數解（若有重根須標示），並利用 $y = G(x)$ 在 $x = 1$ 處有極值，求 a 的值

(3) 在 $0 \leq x \leq 2$ 範圍中，求 $G(x)$ 的最小值