

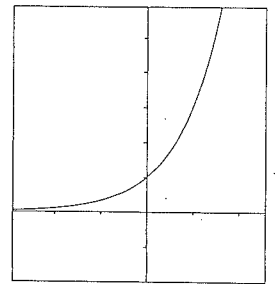
臺北市立大安高級工業職業學校 105 學年度第 3 次教師甄選
數學 科筆試試題

- 作答說明：1. 請在彌封之答案卷上標明題號依序作答，答案卷上不得書寫姓名或作任何記號。
 2. 全卷限用藍色或黑色單一顏色筆作答。
 3. 作答時間 60 分鐘。
 4. 本試題共 二 大題，滿分 100 分。
 5. 作答時不可使用計算機。
 6. 交卷時請將試題卷與答案卷一併繳交。
 7. 請於所發放的答案卷內完成作答，不加發答案卷。

一、選擇題(四選一，每題 4 分，共佔 60 分)

1. 一顆骰子連擲 50 次，其中幺點的次數出現 r 次的機率為 P_r ，當 P_r 值為最大時，則其 r 值為何？
 (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

2. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 皆為實係數多項式，已知 $f(3)=11, f(11)=17, f(17)=-3$ ，且
 $g(x)=11\frac{(x-11)(x-17)}{(3-11)(3-17)}+17\frac{(x-3)(x-17)}{(11-3)(11-17)}-3\frac{(x-3)(x-11)}{(17-3)(17-11)}$ ，則下列哪一個選項正確？
 (A) $f(x)=g(x)$
 (B) 方程式 $f(x)=0$ 在 3 與 11 之間沒有實根
 (C) 方程式 $g(x)=12$ 恰有兩個相異實根
 (D) 若多項式 $h(x)=g(x)\cdot f(f(x))$ ，則 $h(x)$ 除以 $x-11$ 的餘式為 51



3. 玄轉同學在教室檢到一張曲線軌跡圖，如右圖沒有標出兩條互相垂直的直線，何者為 x 軸與 y 軸，也沒有畫出兩軸正向的箭頭符號，試問該曲線圖不可能為下列哪一個選項的部分圖形？

- (A) $y=-3^{-x}$ (B) $y=\log_3(-x)$ (C) $y=3^x$ (D) $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)$

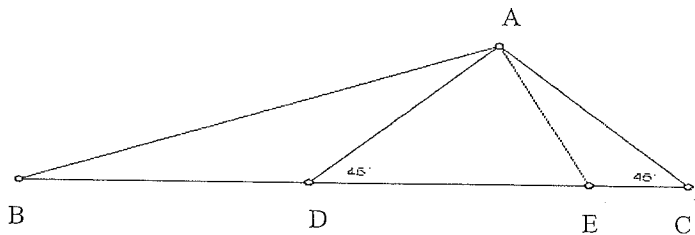
4. 數列 $\{a_n\}$ 的遞迴定義式為 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_n=3a_{n-1}+2 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \text{ 且 } n \geq 2$ ，則推測第 n 項 a_n 值為何？
 (A) $3^{n^2}-1$ (B) 3^n-1 (C) $3^{n-1}+1$ (D) $3^{n+1}-7$

5. 已知四個雙曲線方程式分別為

$$\Gamma_1: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1, \quad \Gamma_2: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = -1, \quad \Gamma_3: \frac{x^2}{n^2} - \frac{y^2}{m^2} = 1, \quad \Gamma_4: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 2$$

其中 m, n 為相異非零整數，則下列哪個選項是錯誤的？

- (A) Γ_1 和 Γ_2 有相同的漸近線
 (B) Γ_1 和 Γ_3 有相同的焦點
 (C) Γ_1 和 Γ_4 有相同的焦點
 (D) Γ_1 和 Γ_4 有相同的漸近線



6. 如圖 $\triangle ABC$ 中， \overline{BC} 邊上兩點 D 和 E ，假設 $\angle ACB = \angle ADC = 45^\circ$ ，令 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ABE$ 的外接圓半徑分別為 R_c 、 R_d 、 R_e ，則下列何者為真？

- (A) $R_d < R_e < R_c$ (B) $R_d > R_e > R_c$ (C) $R_d = R_c > R_e$ (D) $R_d = R_c < R_e$

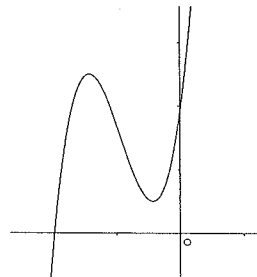
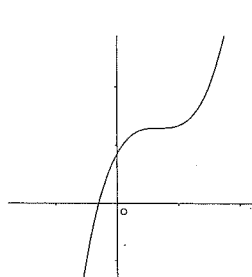
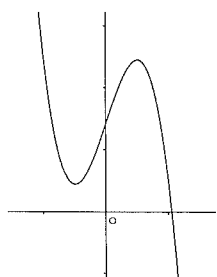
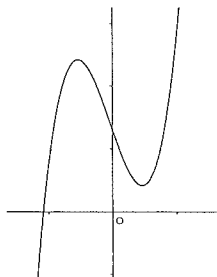
7. 以正立方體各面的中心點為頂點所成之圖形為正八面體，已知正八面體的體積為 8，則此正立方體的體積為何？

- (A) 48 (B) 56 (C) 60 (D) 64

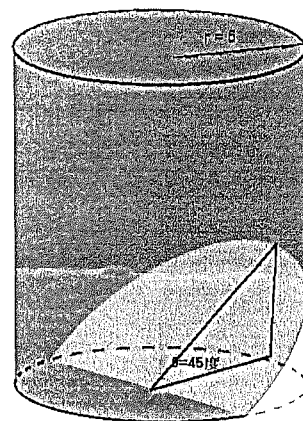
8. 下列選項的範圍，何者可使不等式 $3^x > 2^x > x^2 > \log_2 x > \log_3 x$ 成立？
 (A) $-1 < x < 0$ (B) $0 < x < 1$ (C) $1 < x < 2$ (D) $2 < x < 3$

9. \vec{a} 在 \vec{b} 上的正射影為 $t\vec{b}$ ， \vec{b} 在 \vec{a} 上的正射影為 $k\vec{a}$ ，則下列哪一個推論錯誤？
 (A) 若 $t > 0$ ，則 $k > 0$ (B) 若 $t < 0$ ，則 $k < 0$
 (C) 若 $0 < t < 1$ ，則 $k > 1$ (D) 若 $t > 1$ ，則 $0 < k < 1$

10. 若 a, b, c, d 均為正數，則 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形可為下列哪些選項？
 (A) (B) (C) (D)



11. 已知 $i = \sqrt{-1}$ ，則化簡複數 $z = (2+i)^6$ 後，其複數 z 之虛部為何？
 (A) $2^5 C_1^6 - 2^3 C_3^6 + 2C_5^6$ (B) $2^5 C_1^6 + 2^3 C_3^6 + 2C_5^6$
 (C) $2^5 C_1^6 i - 2^3 C_3^6 i + 2C_5^6 i$ (D) $2^5 C_1^6 i + 2^3 C_3^6 i + 2C_5^6 i$



12. 底面半徑為 5 的直圓柱，今有一個含底面一直徑而與底面成 45° 的一個平面截出一小塊立體圖形，則此立體圖形體積為何？
 (A) 80
 (B) $\frac{250}{3}$
 (C) $\frac{260}{3}$
 (D) 90

13. 設下列各選項資料的迴歸直線皆相同，且皆為負相關，則下列哪一個選項資料的相關係數為最大？

(A)

x	5	3	4
y	3	4	5

(B)

x	6	3	3
y	3	4	5

(C)

x	7	1	4
y	3	4	5

(D)

x	1	10	1
y	3	4	5

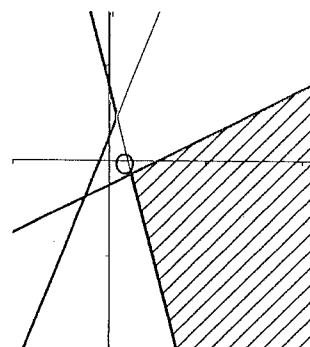
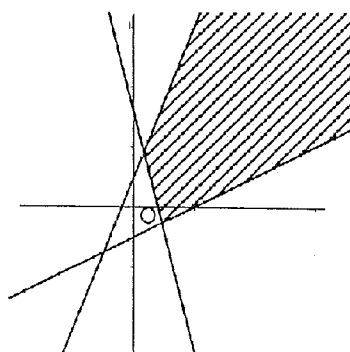
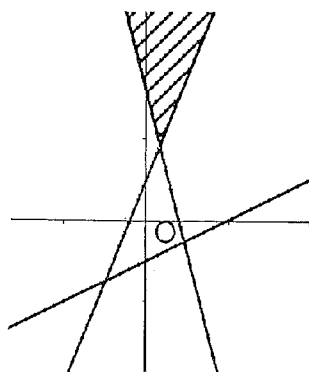
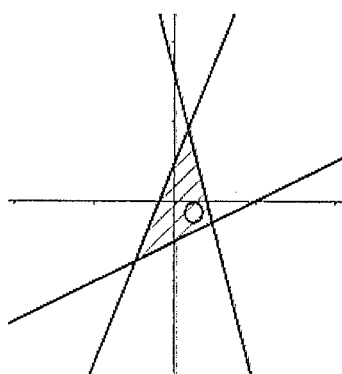
14. 設 $a, b, c, d, e, f \in R$ ，則下列哪一個選項，有可能是聯立不等式 $\begin{cases} ax+by \leq 5 \\ cx+dy \geq -2 \\ ex+fy \geq 1 \end{cases}$ 的圖形？

(A)

(B)

(C)

(D)



15. 若有一數列 $a_1=1, a_2=2+3, a_3=4+5+6, a_4=7+8+9+10, \dots$ 依此規則順序，則 a_{101} 之值為何？
 (A) 515201 (B) 520251 (C) 510050 (D) 530655

二、偵錯題(每題 8 分，共佔 40 分)

說明：此大題為本校學生常犯的錯誤解法，請您觀察找出學生想法的盲點，並請在答案卷上，簡單指出錯誤的關鍵或不足的解題步驟，最後並寫下此題的正確詳解。

1. 題目：設 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x^2 + y^2 = 5$ ，則 $2x - y + 3$ 的最小值為何？

天兵學生甲解法：

利用柯西不等式 $(x^2 + y^2 + 1^2)(2^2 + (-1)^2 + 3^2) \geq (2x - y + 3)^2 \quad \therefore 6 \cdot 14 \geq (2x - y + 3)^2$
 因此 $-2\sqrt{21} \leq 2x - y + 3 \leq 2\sqrt{21}$ 則最小值為 $-2\sqrt{21}$

2. 題目：設 $f(x) = x \left[\frac{1}{x} \right]$, $x \neq 0$ ，其中 $[]$ 為高斯符號，求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 之值為何？

天兵學生乙解法：

$\therefore 0$ 與其他數相乘積後其值仍為 0 $\quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} 0 \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = 0$

3. 題目：若 $|\vec{u}| = 1$ 且 \vec{u} 與 $\vec{v} = (\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$ 之夾角為 45° ，求向量 \vec{u} 為何？

天兵學生丙解法：

令 $\vec{u} = (x, y)$ 且 $x^2 + y^2 = 1$

利用向量內積定義 $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times \cos 45^\circ \quad \therefore (\sqrt{3}-1)x + (\sqrt{3}+1)y = 1 \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

因此 $(\sqrt{3}-1)x + (\sqrt{3}+1)y = 2$ 觀察出 $x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad \therefore \vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)$

4. 題目：若 $n \in \mathbb{N}$ 且滿足 $\frac{n}{7} < \sqrt{11} < \frac{n+1}{7}$ ，則 n 值為何？

天兵學生丁解法：

利用 $3 < \sqrt{11} < 3.5 \quad \therefore 21 < 7\sqrt{11} < 24.5$ 因此取 $n = 22, 23$ 或 24

5. 題目：某次數學測驗有 10 題是非題，若題目敘述正確則寫「O」，反之若題目敘述錯誤則寫「x」，有一學生添彬作答完成後，發現他的答案中沒有連續兩題出現「O」，請問此添彬學生的答案中，有多少種可能的情況？

天兵學生戊解法：

利用不相鄰使用插入方法，先排入連續五個 x，其中有六個間隔 $\times _ \times _ \times _ \times _ \times _ \times$

則分別討論有幾個 O 的情況，因此共有

$C_0^6 + C_1^6 + C_2^6 + C_3^6 + C_4^6 + C_5^6 = 63$ 種情形

～數學試題到此結束，祝您考試順利!～