105 年大學入學指定科目考試
數學甲試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（佔 76 分）
一、單選題（佔 24 分）

1. 請問下列選項中哪一個數值 a 會使得 x 的方程式 $\log a-\log x=\log(a-x)$ 有兩相異實數解？
(1) $a=1$　(2) $a=2$　(3) $a=3$　(4) $a=4$　(5) $a=5$　【105 數甲】

答：(5)　**（第一冊第三章指數對數－對數運算律）**

解：原式 $\Rightarrow \log\dfrac{a}{x}=\log(a-x)\Rightarrow \dfrac{a}{x}=a-x\Rightarrow x^2-ax+a=0$，但 $a>0$

判別式 $\Rightarrow (-a)^2-4a>0\Rightarrow a(a-4)>0\Rightarrow a>4$

2. 下列哪一個選項的數值最接近 $\cos(2.6\pi)$？
(1) $\sin(2.6\pi)$　(2) $\tan(2.6\pi)$　(3) $\cot(2.6\pi)$　(4) $\sec(2.6\pi)$　(5) $\csc(2.6\pi)$　【105 數甲】

答：(3)　**（第三冊第一章三角－弳度量、廣義三角、角度互換）**

解：$\cos 2.6\pi=\cos 0.6\pi=\cos 108^\circ=-\cos 72^\circ\approx 0.3090$

(1)(5)均為正，不合　(2) $\tan 2.6\pi\approx -3.0777$，不合

(3) $\cot 2.6\pi\approx -0.3249$，合　(4) $\sec 2.6\pi\approx -3.2361$，不合

3. 假設三角形 ABC 的三邊長分別為 $\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=8$、$\overline{AC}=6$。請選出和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的內積為最大的選項。
(1) $\overrightarrow{AC}$　(2) $\overrightarrow{CA}$　(3) $\overrightarrow{BC}$　(4) $\overrightarrow{CB}$　(5) $\overrightarrow{AB}$　【105 數甲】

答：(4)　**（第三冊第三章平面向量－內積）**

解：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(6^2+5^2-8^2\right)=\dfrac{-3}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\dfrac{1}{2}\left(6^2+5^2-8^2\right)=\dfrac{3}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}\left(5^2+8^2-6^2\right)=\dfrac{-53}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{2}\left(5^2+8^2-6^2\right)=\dfrac{53}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=5^2=25$

4. 假設 a、b 皆為非零實數，且座標平面上二次函數 $y=ax^2+bx$ 與一次函數 $y=ax+b$ 的圖形相切。請選出切點所在位置為下列哪一個選項。
(1) 在 x 軸上　(2) 在 y 軸上　(3) 在第一象限　(4) 在第四象限
(5) 當 $a>0$ 時，在第一象限；當 $a<0$ 時，在第四象限　【105 數甲】

答：(1)　**（第一冊第二章多項函數－一次二次函數）**

解：$\begin{cases} y=ax^2+bx \\ y=ax+b \end{cases} \Rightarrow ax^2+(b-a)x-b=0$，

其判別式 $(b-a)^2+4ab=0 \Rightarrow (b+a)^2=0 \Rightarrow b=-a$

故 $ax^2-2ax+a=a(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=0$，切點 $(1,0)\in x$ 軸

二、多選題（佔 24 分）

5. 在座標空間中，點 $P(2,2,1)$ 是平面 E 上距離原點 $O(0,0,0)$ 最近的點。
請選出正確的選項。
(1) 向量 $\vec{v}=(1,-1,0)$ 爲平面 E 的法向量
(2) 點 P 也是平面 E 上距離點 $(4,4,2)$ 最近的點
(3) 點 $(0,0,9)$ 在平面 E 上
(4) 點 $(2,2,-8)$ 到平面 E 的距離爲 9
(5) 通過原點和點 $(2,2,-8)$ 的直線與平面 E 會相交 【105 數甲】

答：(2)(3)（**第四冊第二章空間中的直線與平面—直線與平面關係**）

解：(1)(2)法向量 $\overrightarrow{OP}=(2,2,1)//(4,4,2)$

(3)平面 E：$2x+2y+z=9$，則 $(0,0,9)\in E$

(4) $d\left((2,2,-8),E\right)=\dfrac{|4+4-8-9|}{3}=3$

(5) $\overrightarrow{OP}=(2,2,1)\perp(2,2,-8)$，且 $O(0,0,0)\notin E$，故過原點和 $(2,2,-8)$ 直線與 E 平行

6. 座標平面上一矩形，其頂點分別爲 $A(3,-2)$、$B(3,2)$、$C(-3,2)$、$D(-3,-2)$。
設二階方陣 M 爲在座標平面上定義的線性變換，可將 A 映射到 B 且將 B 映射到 C。
請選出正確的選項。
(1) M 定義的線性變換是鏡射變換
(2) $M\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
(3) M 定義的線性變換將 C 映射到 D 且將 D 映射到 A
(4) M 的行列式值爲 -1
(5) $M^3=-M$ 【105 數甲】

答：(2)(3)(5)（**第四冊第三章矩陣—平面變換、反矩陣**）

解：(1)(2) $M\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow M=\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\times\dfrac{1}{12}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-3}{2} \\ \dfrac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-3}{2} \\ \dfrac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $\det\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-3}{2} \\ \dfrac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}=1$

(5) $M^3=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-3}{2} \\ \dfrac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-3}{2} \\ \dfrac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-3}{2} \\ \dfrac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-2}{3} & 0 \end{bmatrix}=-M$

7. 在實數線上，動點 A 從原點開始往正向移動，動點 B 從 8 的位置開始往負向移動。兩個動點每一秒一動一次，已知第一秒 A、B 移動的距離分別爲 1、4，且 A、B 每次移動的距離分別爲其前一次移動距離的 $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍。令 c_n 爲第 n 秒時 A、B 的中點位置。請選出正確的選項。

(1) $c_1=\frac{5}{2}$ (2) $c_2>c_1$ (3) 數列 $\langle c_{n+1}-c_n\rangle$ 是一個等比數列

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=2$ (5) $c_{1000}>2$ 【105 數甲】

答：(1)(4)（第六冊第一章極限概念—數列極限）

解：$c_1=\dfrac{(0+1)+(8-4)}{2}=\dfrac{5}{2}>c_2=\dfrac{\left(0+1+\frac{1}{2}\right)+\left(8-4-\frac{4}{3}\right)}{2}=\dfrac{25}{12}$

$$c_n=\frac{\left(0+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\left(8-4-\frac{4}{3}-\frac{4}{9}-\cdots-\frac{4}{3^{n-1}}\right)}{2}=2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^{n-1}}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=2$，$c_{1000}<2$，而 $\langle c_{n+1}-c_n\rangle=\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{2}{3^n}$，非等比數列

三、選填題（佔 28 分）

A. 投擲一枚均勻銅板 8 次。在最初兩次的投擲中曾經出現過正面的條件下，8 次投擲中恰好出現 3 次正面的條件機率爲______。（化成最簡分數） 【105 數甲】

答：$\dfrac{3}{16}$（第二冊第三章機率—條件機率）

解：
$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8\left[\frac{2!}{2!0!}\times\frac{6!}{1!5!}+\frac{2!}{1!1!}\times\frac{6!}{2!4!}\right]}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\frac{2!}{2!0!}+\frac{2!}{1!1!}\right]}=\frac{3}{16}$$

B. 設 $\vec{u}=(1,2,3)$、$\vec{v}=(1,0,-1)$、$\vec{w}=(x,y,z)$ 爲空間中三個向量，且向量 $\vec{w}$ 與向量 $\vec{u}\times\vec{v}$ 平行。若行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\x&y&z\end{vmatrix}=-12$，則 $\vec{w}=$______。 【105 數甲】

答：$(1,-2,1)$（第四冊第一章空間概念—外積與體積）

解：$\vec{u}\times\vec{v}=(-2,4,-2)//\vec{w}=(t,-2t,t)$，$|\vec{u}\times\vec{v}|=2\sqrt{6}$

$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\x&y&z\end{vmatrix}=-12\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{t^2+(-2t)^2+t^2}=\sqrt{6}\Rightarrow t=\pm1$（取正）

C. 在所有滿足 $z-\bar{z}=-3i$ 的複數 z 中（其中 $\bar{z}$ 為 z 的共軛複數，$i=\sqrt{-1}$），
$\left|\sqrt{7}+8i-z\right|$ 的最小值為________。（化成最簡分數） 【105 數甲】

答：$\frac{19}{2}$ **（第五冊第二章複數—複數幾何）**

解：$z=a+bi$，其中 $a,b\in R$，則 $\bar{z}=a-bi$ $\Rightarrow z-\bar{z}=2bi=-3i$ $\Rightarrow b=-\frac{3}{2}$

$$\left|\left(\sqrt{7}+8i\right)-\left(a-\frac{3}{2}i\right)\right|=\sqrt{\left(a-\sqrt{7}\right)^2+\left(8+\frac{3}{2}\right)^2}\le\sqrt{\left(8+\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{19}{2}$$

D. 一圓盤分成標有數字 0、1 的兩區域，且圓盤上有一可轉動的指針。
已知每次轉動指針後，前後兩次指針停在同一區域的機率為 $\frac{1}{4}$，
而停在不同區域的機率為 $\frac{3}{4}$。遊戲規則為連續轉動指針三次，
計算指針在這三次所停區域的標號數字之和。
若遊戲前指針的位置停在標號數字為 1 的區域，
則此遊戲的期望值為________。（化成最簡分數） 【105 數甲】

答：$\frac{21}{16}$ **（第五冊第一章機率與統計—期望值）**

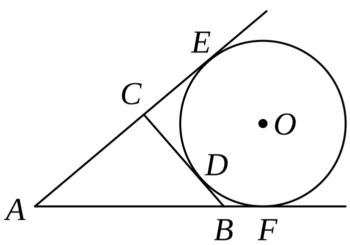
解：累積 3 點機率：$\underbrace{\frac{1\times1\times1}{4^3}}_{(1,1,1)}=\frac{1}{64}$、累積 2 點機率：$\underbrace{\frac{1\times1\times3}{4^3}}_{(1,1,0)}+\underbrace{\frac{1\times3\times3}{4^3}}_{(1,0,1)}+\underbrace{\frac{3\times3\times1}{4^3}}_{(0,1,1)}=\frac{21}{64}$

累積 1 點機率：$\underbrace{\frac{1\times3\times1}{4^3}}_{(1,0,0)}+\underbrace{\frac{3\times3\times3}{4^3}}_{(0,1,0)}+\underbrace{\frac{3\times1\times3}{4^3}}_{(0,0,1)}=\frac{39}{64}$、累積 0 點機率：$\underbrace{\frac{3\times1\times1}{4^3}}_{(0,0,0)}=\frac{3}{64}$

$$E(X)=3\times\frac{1}{64}+2\times\frac{21}{64}+1\times\frac{39}{64}+0\times\frac{3}{64}=\frac{21}{16}$$

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

1. 如圖，已知圓 O 與直線 BC、直線 AC、直線 AB 均相切，
且分別相切於 D、E、F。又 $\overline{BC}=4$、$\overline{AC}=5$、$\overline{AB}=6$
(1) 假設 $\overline{BF}=x$，試利用 x 分別表示 $\overline{BD}$、$\overline{CD}$ 以及 $\overline{AE}$，
並求出 x 之值。
(2) 若將 $\overrightarrow{AD}$ 表示成 $\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 α、β 之值為何？



【105 數甲】

答：(1) $\overline{BD}=x$、$\overline{CD}=4-x$、$\overline{AE}=9-x$、$x=\frac{3}{2}$ (2) $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

（第三冊第三章平面向量—分點公式）

解：(1) $\overline{BF}=\overline{BD}=x$、$\overline{CD}=\overline{CE}=4-x$、$\overline{AF}=6+x=\overline{AE}=5+4-x\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

(2) $\overline{BD}=\frac{3}{2}$、$\overline{CD}=\frac{5}{2}$，則 $\overline{BD}:\overline{CD}=3:5$，故 $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

2. 設三次實係數多項式 $f(x)$ 的最高次項係數爲 a。
已知在 $0\le x\le 3$ 的範圍中，$f(x)$ 的最大值 12 發生在 $x=0$、$x=2$ 兩處。
另一多項式 $G(x)$ 滿足 $G(0)=0$，以及對任意實數 s、r（$s\le r$），
$\int_s^r f(t)dt=G(r)-G(s)$ 恆成立，且函數 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有（相對）極值。
(1) 試描繪 $y=f(x)$ 在 $0\le x\le 3$ 的範圍中可能的圖形，
在圖上標示 $(0,f(0))$、$(2,f(2))$，並由此說明 a 爲正或負。
(2) 試求方程式 $f(x)-12=0$ 的實數解（如有重根須標示），
並利用 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有極值，求 a 之值。
(3) 在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，求 $G(x)$ 之最小值。 【105 數甲】

$\boxed{答}$：(1)如圖，$a<0$ (2) 根爲 0、2、2，$a=-12$
(3) $G(x)$ 之最小值 0

（第六冊第二章多項式的微積分—微分與極值）

$\boxed{解}$：(1) 依題意得知三欄表，如右：

x	0		p		2		3
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$f(0)=12$、$f(2)=12$、$f'(p)=0$、$f'(2)=0$

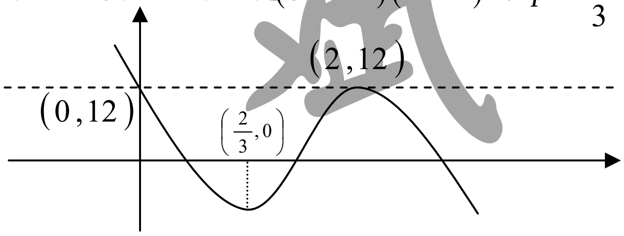
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+12$，且 $a<0$

$\Rightarrow f(2)=8a+4b+2c+12=12\Rightarrow 4a+2b+c=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c\Rightarrow f'(2)=12a+4b+c=0$

故 $b=-4a$、$c=4a$，則 $f(x)=ax^3-4ax^2+4ax+12$

而 $f'(x)=3ax^2-8ax+4a=a(3x-2)(x-2)\Rightarrow p=\dfrac{2}{3}$



(2) $\int_s^r f(t)dt=G(r)-G(s)$，表示 $G(x)$ 爲 $f(x)$ 的反導函數，
$y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有相對極值，
即 $G'(1)=f(1)=a-4a+4a+12=0\Rightarrow a=-12$
則 $f(x)=-12x^3+48x^2-48x+12$
故 $f(x)-12=-12x^3+48x^2-48x=-12x(x-2)^2=0$，根爲 0、2、2

(3) $G'(x)=f(x)=-12(x-1)\left(x^2-3x+1\right)$

$G(0)=0$，故 $G(x)=-3x^4+16x^3-24x^2+12x$

x	0	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		1	2	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	
$G'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$G(x)$	↗		↘		↗		↘

比較 $G(0)=0$、$G(1)=1$，得知在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，$G(x)$ 之最小值 $G(0)=0$