105 年中正國防幹部預備學校教師甄選數學科試題

一.多重選擇題 (全對才給分，每題 5 分)

1. 坐標平面上，自點$A(-2，-1)$沿方格之邊，走到點$B(4，3)$，走法如下：

(1) 以方向 "↑" "↓" "→" 前進且不經過原點之走法有 a 種

(2) 以走捷徑方式且經過原點之走法有 b 種

(3) 以走捷徑方式，經過原點時必須轉彎(行進方向改變)之走法有 c 種

(4) 以走捷徑方式只轉了三次彎之走法有 d 種

(5) 以走捷徑方式及行經路線恰平分A 到 B所決定的矩形格子之走法有 e 種

(A) $a=6250$ (B) $b=105$ (C) $c+d=65$ (D) $d+e=84$
(E) $b+c+d+e<500$

2. 設ΔOAB中，$O(0，0)$，$A(3，1+cos\theta)$，$B(1+sin\theta，3)$， 則有關ΔOAB之面積，

下列敘述哪些是正確的?

(A)面積最大值為 6

(B)面積最小值為$\frac{15-2\sqrt{2}}{4}$

(C)當$\theta=\pi$，ΔOAB面積有最大值

(D) 當$\theta=-\frac{7}{4}\pi$，ΔOAB面積有最小值

(E) 當$\theta=-\frac{1}{2}\pi$，ΔOAB面積有最大值

3. 設 $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$，則下列敘述何者為真?

(A)$y=f(x)$在 $x=1$ 處之切線方程式為 $3x-25y+2=0$

(B)$f(x)$在 $x=2$ 處有極大值 0.25

(C) 恰有 3 個反曲點

(D)在$-2\sqrt{3}<x<0$ 時 $f(x)$圖形凹口向下

(E) 在$-2 < x < 2$時$f(x)$為遞減函數

4. 設正整數 n 的個位數字以 $f(n)$表示，並令$a_n = f(n^2) - f(n)$，又使a_n=0 的正整數 n 由小而大依序列出n_1 ，n_2 ，n_3 … …. ，則下列敘述哪些是正確的

(A)$a_5 = 0$ (B) $a_6 = a_{10}$ (C) $\sum_{n=1}^{98} a_n = 8$ (D)$n_3 = 7$ (E) $n_{50} = 125$

5. 下列何者敘述正確

(A)設α、β為二任意角，

則$cos(\alpha+\beta) \cdot cos(\alpha-\beta) = cos^2\beta - sin^2\alpha = cos^2\alpha - \ sin^2\beta$

(B)設$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ，則$\sqrt{1+sin\alpha} + \sqrt{1-sin\alpha} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$

(C)在ΔABC中，$tanA + tanB + tanC = tanA \cdot tanB \cdot tanC$

(D)$cos80^\circ \cdot cos160^\circ \cdot cos320^\circ = -\frac{1}{8}$

(E) 方程式$x = \pi \cdot sinx$的實根恰有 3 個

6. 如圖，連接一正四面體 $ABCD$ 的各稜邊中點可得一正八面體 $EOFIHG$。設 $O(0，0，0)$，$I(0，0，1)$，$C(a，0，0)$，$A(b，c，d)$，則下列哪些選項正確?

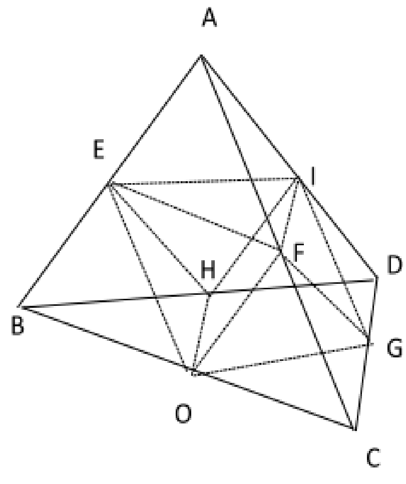
(A)$a = 0.5$

(B) $b = 0$

(C) $\overline{AB} = \sqrt{2}$

(D)$EFGH$四點共平面且 z 坐標相同

(E) 正八面體$EOFIHG$的體積是正四面體$ABCD$體積的一半



二.填充題 (每題 4 分)

1. $x \in R$，求$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 2x + 5} + x^2 + 0.25$ 之最小值。

2. 求 b 的所有可能值使得方程組$\begin{cases} \sqrt[3]{xy} = b^b \\ log_b(x^{log_b y}) + log_b(y^{log_b x}) = 6\mathrm{b}^4 \end{cases}$ 有實數解 $(x\,,y)$ 。

3. 有一隻螞蟻沿著正四面體 $ABCD$ 上的邊爬行，當牠到一頂點時，下一次移動到其他頂點的機率各為 $\frac{1}{3}$，每過一分鐘移動一次，設螞蟻從 A 點出發，求 n 分鐘後恰好在 B 頂點的機率。

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$，求$(I - A + A^2)(I - A^3 + A^6 - A^9 + A^{12} \ldots . + (-A)^{3n} + \cdots)$之值。

5. 數據 $\sqrt{38}$ 、$\sqrt{1}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、 $\ldots \ldots \sqrt{2n-1}$ 的算數平均數$= A_n$，標準差$= B_n$，求 $\lim_{n \to \infty} \frac{B_n}{A_n}$ 。

6. 設直線$L：x - 1 = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-2}$，與二平面$\alpha: 2x - y - z - 3 = 0$、$\beta: x - 2y + z - 6 = 0$,設 L與 α 的交點為 A,L與β 的交點為 B,動點 P在α與β的交線上，求ΔPAB面積的最小值。

7. 實係數二次方程式$x^2 - ax + b = 0$的二實根α、β 滿足 $-1 \le \alpha \le 0$，$1 \le \beta \le 2$，求$a^2 + b^2$ 的最小值。

8. $\Delta\,ABC$中，G為重心，H為垂心，若$\angle A = 60^\circ$，$\angle C = 45^\circ$ ，$\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ ，求 $\overline{GH}$ 長。

9. 設三資料$(1，3)$、$(2，\alpha)$，$(3，\beta)$的迴歸直線方程式為 $\mathrm{y} = -\mathrm{x} + 4$，求

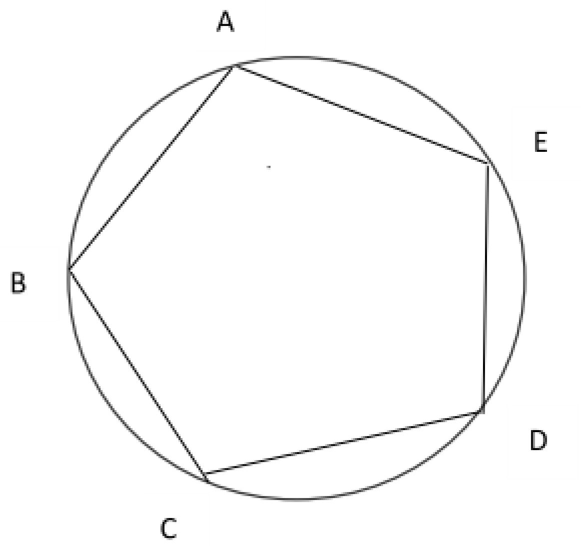
(α，β)。

10. 設 $\overline{AB}$ 為橢圓 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ 之焦弦，已知A點坐標$(2\sqrt{3},\sqrt{6})$，B 點位於第四象限，求 $\overline{AB}$

三.計算題(每題 10 分)

1. 已知一圓內接四邊形$ABCD$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=2$，則若P為四邊形$ABCD$ 內部一點，設P到$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DA}$ 之距離分別為x、y、z、u，則$x^2+y^2+9z^2+4u^2$ 之最小值為何?

2. 如圖，設正五邊形$ABCDE$ 內接於半徑為2的圓，圓心為O， 若F為$\overline{AO}$的中點求線段長乘積 $\overline{AF}\cdot\overline{BF}\cdot\overline{CF}\cdot\overline{DF}\cdot\overline{EF}$



四.證明題 (每小題 5 分)

1.證明二項分布$X\sim B(n,p)$的期望值 $E(X)=np$

2. 證明二項分布$X\sim B(n,p)$的標準差 $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$