數學甲

102 學年度全國高級中學
指定科目模擬考試

數學甲

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全、選修數學甲(上)

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內畫記，修正時應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，並標明題號。請在規定之欄位以筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正帶（液）。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 單選題及多選題只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到－，±，以及 6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1) 3　(2) 5　(3) 7　(4) 9　(5) 11，而考生得到的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 3□ 畫記（注意不是 7），如：

解答欄												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

例：若第 5 題為多選題，而考生認為正確的選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡第 5 列的 1□ 與 3□ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
5	■	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

(二) 選填題的題號是 A.，B.，C.，…，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第 C. 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 −□ 與第 21 列的 7□ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

祝考試順利

NO.99300189

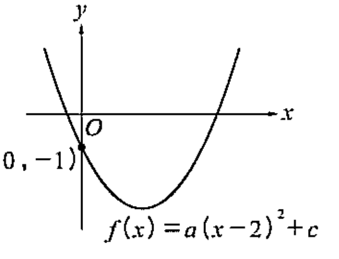
4 716413 049210 22

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 78 分）

一、單選題（24 分）

說明：第1.題至第4.題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對者，得6分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 如右圖所示，拋物線 $f(x)=a(x-2)^2+c$（$ac\neq 0$），其圖形過點（0，-1），另一函數 $g(x)=c(x-2)^2+a$，若方程式 $f(x)=g(x)$ 的解為 α、β 且 $\alpha<\beta$，則下列敘述何者正確？



(1) $f(\alpha)>0$
(2) $|a|>|c|$
(3) $1\leq\alpha<\beta\leq 3$
(4) $\alpha\beta<0$
(5) 條件不足，無法確定 α，β 位置

2. 已知以 x，y 為未知數之方程組 $\begin{cases} y=x^2+\dfrac{1}{4} \\ y=x\tan\theta \end{cases}$ 有實數解，下列哪一選項之 θ 值可滿足此一條件？

(1) 0
(2) $\dfrac{\pi}{6}$
(3) $\dfrac{5\pi}{6}$
(4) $\dfrac{2\pi}{3}$
(5) π

3. 就三元一次方程組 $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+ay+2z=4 \\ x+6y+(1-a)z=-4 \end{cases}$ 中三平面關係，下列哪一選項正確？

(1) 當 $a=1$ 時，方程組無限多組解，三平面關係為三平面交於一條直線
(2) 當 $a=0$ 時，方程組無限多組解，三平面關係為三平面交於一條直線
(3) 當 $a=0$ 時，方程組無解，三平面關係為三平面兩兩交於一直線
(4) 當 $a=4$ 時，方程組無限多組解，三平面關係為兩平面重疊並與第三個平面交於一條直線
(5) 當 $a=5$ 時，方程組恰有一解（12，−4，−4），三平面關係為三平面交於一點

4. 歡樂大贏家節目中，有 A、B、C、D 四扇門，其中一扇門後有最大獎汽車一輛，另外三扇門則各為電視一臺，參賽者須由四扇門中選擇一扇門。當參賽者選好門後，主持人會打開剩下的三扇門中後面為電視的其中一扇門，並且讓參賽者決定要不要更改他的選擇。若參賽者決定換成剩下的兩扇門之一，則他贏得汽車大獎的機率為多少？

(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $\frac{3}{8}$

(4) $\frac{1}{2}$

(5) $\frac{3}{4}$

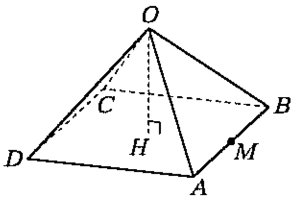
二、多選題（40 分）

說明：第 5. 題至第 9. 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，畫記在答案卡之「解答欄」。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

5. 坐標平面上，直線 $x=m$（$m>0$）與對數函數 $y=\log_2 x$、$y=\log_4 x$、$y=\log_8 x$ 圖形分別交於點 A_m、B_m、C_m，下列敘述何者正確？
   (1) $\overline{A_1A_2}=\sqrt{2}$
   (2) $\overline{A_3B_9}=6$
   (3) $\overline{A_2B_2}$，$\overline{A_4B_4}$，$\overline{A_8B_8}$ 成等比數列
   (4) $\overline{A_3B_3}$，$\overline{A_6B_6}$，$\overline{A_{12}B_{12}}$ 成等差數列
   (5) $\overline{A_8B_8}:\overline{A_8C_8}=3:4$

6. 設 A、B 均為 n 階方陣（O 為 n 階零方陣，I 為 n 階單位方陣），則下列各性質，何者必成立？
   (1) 設 A^{-1} 與 B^{-1} 均存在，則 $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$
   (2) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$
   (3) 若 $AB=O$，則 $BA=O$
   (4) 若 $AB=I$，則 $BA=I$
   (5) $(A+I)(A^2-A+I)=A^3+I$

7. 四角錐 O-$ABCD$ 中，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=\sqrt{34}$，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=6$，且 $ABCD$ 為正方形，過 O 作 $ABCD$ 平面之垂線，交此平面於 H，M 為 $\overline{AB}$ 中點，下列各敘述哪些為真？



(1) $\overline{OM}=\sqrt{24}$
(2) $\overline{OH}=\sqrt{15}$
(3) 令平面 $ABCD$ 與平面 ABO 所夾銳角為 θ，則 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$
(4) A 到 $\overleftrightarrow{OB}$ 之距離為 $\dfrac{30}{\sqrt{34}}$
(5) 若平面 OAB 與平面 OBC 所夾之銳角為 ϕ，則 $\cos\phi=\dfrac{9}{25}$

8. 在半徑為 1 的圓上作內接正六邊形 $ABCDEF$，由 $ABCDEF$ 任取相異三點作三角形的頂點，請選出正確的選項。
(1) 此三角形面積最小值為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
(2) 此三角形面積最大值為 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$
(3) 此三角形為正三角形的機率為 $\dfrac{1}{10}$
(4) 此三角形為鈍角三角形的機率為 $\dfrac{6}{10}$
(5) 所得的三角形面積的期望值為 $\dfrac{11\sqrt{3}}{20}$

9. 等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$ 且 $\overline{AB} \neq \overline{CD}$，且 $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$，$\overrightarrow{AD}=(7,-1)$，若 M、N 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 中點，則下列敘述何者正確？

(1) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=5\sqrt{2}$

(2) $\overrightarrow{AC}=(4,3)$

(3) $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$

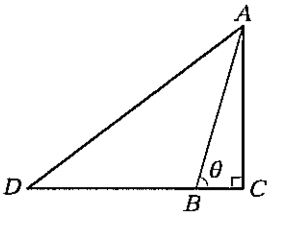
(4) $\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$

(5) $\overrightarrow{DB}=\frac{6}{7}\overrightarrow{DM}+\frac{2}{7}\overrightarrow{DN}$

三、選填題（14 分）

說明：第 A. 題至第 B. 題為選填題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（10－13）內。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 如右圖△ACD，已知∠$C=90^\circ$ 且 $\overline{AB}=\overline{BD}$，若 $\sin\theta=\frac{24}{25}$，求 $\tan\frac{\theta}{2}$ 之值為 $\frac{⑩}{⑪}$。（化為最簡分數）



B. 在坐標平面上，已知 O 為原點，$C(4,2)$ 為圓 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$ 的圓心，設直線 L：$y=mx$（$m<1$）與圓 C 交於 P、Q 相異兩點，其中 $\overline{OP}<\overline{OQ}$。當△$CPQ$ 面積為最大時，m 之值為 $\frac{⑫}{⑬}$。（化為最簡分數）

第貳部分：非選擇題（占 22 分）

說明：本部分共有二大題計算題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、(3)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每題配分標於題末。

一、設有 A、B、C 三支大瓶子，開始時，A 瓶裝有 a 公升的水，B 瓶裝有 b 公升的水，C 瓶裝有 c 公升的水。每一輪操作都是先將 A 瓶的水倒出一半到 B 瓶，然後再將 B 瓶的水倒出一半到 C 瓶，然後再將 C 瓶的水倒出一半回 A 瓶，完成一輪的操作。設 n 輪操作後，A 瓶有 a_n 公升的水，B 瓶有 b_n 公升的水，C 瓶有 c_n 公升的水。

(1) 此倒水問題中，操作前三瓶內之水量與操作後三瓶內之水量的轉移矩陣 D 為何？（4 分）

(2) 當 $a=1$，$b=1$，$c=1$ 時，求 a_2 及 b_2 及 c_2。（4 分）

(3) 長久操作後，A 瓶內有 x 公升的水，B 瓶內有 y 公升的水，C 瓶內有 z 公升的水，滿足 $D\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$，若 $x+y+z=1$，則 x，y，z 之值為何？（4 分）

二、方程式 $z^6=4-4\sqrt{3}\,i$ 的六個根分別為 z_0，z_1，z_2，z_3，z_4，z_5。今將六個根描繪在複數平面上，依次相連得一正六邊形。

(1) 此六個頂點中，有 a 個點在第二象限，b 個點在第三象限，試求數對 (a,b)。（5 分）

(2) 試求 $|z_0-z_1|+|z_0-z_2|+|z_0-z_3|+|z_0-z_4|+|z_0-z_5|$ 之值。（5 分）

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(3)	(4)	(2)	(3)	(1)(2)(4)(5)	(4)(5)	(3)(4)	(1)(2)(3)	(4)(5)

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：理解二次多項式函數圖形及求二次方程式的根

解析：$f(x)=g(x)$

$\Rightarrow a(x-2)^2+c=c(x-2)^2+a$

$\Rightarrow (a-c)(x-2)^2+(c-a)=0$

$\Rightarrow (a-c)[(x-2)^2-1]=0$

$\Rightarrow a=c$ 或 $(x-2)^2=1$

$\Rightarrow a=c$ 或 $x=1$ 或 3

$\because f(0)=-1 \Rightarrow 4a+c=-1$

若 $a=c$ 則 $a=c=-\frac{1}{5}$（不合 $\because a>0$）

$x=1$ 或 $3 \Rightarrow \alpha=1$，$\beta=3$

(1) ×：由題圖知 $f(\alpha)=f(1)<0$

(2) ×：$f(1)=a+c<0 \Rightarrow |a|<|c|$

(3) ○：$1\leq \alpha<\beta\leq 3$

(4) ×：$\alpha\beta=1\times 3>0$

(5) ×

故選(3)。

2. (4)

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：實數解與判別式的關係，由 tan 函數的範圍找出對應的角

解析：兩式解聯立得 $x^2+\frac{1}{4}=x\tan\theta$

$\Rightarrow x^2-(\tan\theta)x+\frac{1}{4}=0$

由判別式 $D\geq 0$ 找出 $\tan\theta$ 的範圍

$(-\tan\theta)^2-4\left(\frac{1}{4}\right)\geq 0$

$\Rightarrow \tan^2\theta\geq 1$

(1) $\tan^2 0=0$

(2) $\tan^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$

(3) $\tan^2\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{3}$

(4) $\tan^2\frac{2\pi}{3}=3$

(5) $\tan^2\pi=0$

符合上述條件者，故選(4)。

3. (2)

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：了解空間中三平面的關係

解析：$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&a&2\\1&6&1-a\end{vmatrix}=-a\ (a-4)$

$\Delta_x=\begin{vmatrix}0&2&1\\4&a&2\\-4&6&1-a\end{vmatrix}=12a$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&4&2\\1&-4&1-a\end{vmatrix}=-4a$

$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&a&4\\1&6&-4\end{vmatrix}=-4a$

① 當$a=4$時，$\Delta=0$，Δ_x，Δ_y，$\Delta_z\neq0$，故無解，其圖形為前兩平面平行，並與第三個平面交於一直線

② 當$a=0$時，$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，有無限多組解，又三平面法向量不平行故其圖形為三平面交於一直線

③ 當$a\neq0$，4時，恰有一解$\left(\dfrac{-12}{a-4},\dfrac{4}{a-4},\dfrac{4}{a-4}\right)$，其圖形為三平面交於一點

故選(2)。

4. (3)

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：利用獨立事件的機率特性解題

解析：P(中最大獎)$=P$(未選中最大獎且換到有最大獎門)$=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$

故選(3)。

二、多選題

5. (1)(2)(4)(5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：利用對數函數的運算處理乘除與次方問題

解析：(1) ○：點$A_1(1,\log_2 1)=(1,0)$，點$A_2(2,\log_2 2)=(2,1)\Rightarrow\overline{A_1A_2}=\sqrt{2}$

(2) ○：點$A_3(3,\log_2 3)$，點$B_9(9,\log_4 9)=(9,\log_2 3)\Rightarrow\overline{A_3B_9}=6$

(3) ×：$A_2(2,\log_2 2)$，$B_2(2,\log_4 2)\Rightarrow\overline{A_2B_2}=\log_2 2-\log_4 2=\dfrac{1}{2}\log_2 2=\dfrac{1}{2}$

$A_4(4,\log_2 4)$，$B_4(4,\log_4 4)\Rightarrow\overline{A_4B_4}=\log_2 4-\log_4 4=\dfrac{1}{2}\log_2 4=1$

$A_8(8,\log_2 8)$，$B_8(8,\log_4 8)\Rightarrow\overline{A_8B_8}=\log_2 8-\log_4 8=\dfrac{1}{2}\log_2 8=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow\overline{A_2B_2}$，$\overline{A_4B_4}$，$\overline{A_8B_8}$ 成等差數列

(4) ○：同理 $\overline{A_3B_3}=\log_2 3-\log_4 3=\dfrac{1}{2}\log_2 3$

$\overline{A_6B_6}=\log_2 6-\log_4 6=\dfrac{1}{2}\log_2 6=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_2 3$

$\overline{A_{12}B_{12}}=\log_2 12-\log_4 12=\dfrac{1}{2}\log_2 12=1+\dfrac{1}{2}\log_2 3$

$\Rightarrow\overline{A_3B_3}$，$\overline{A_6B_6}$，$\overline{A_{12}B_{12}}$ 成等差數列

(5) ○：$\overline{A_8B_8}=\dfrac{3}{2}$，$\overline{A_8C_8}=\log_2 8-\log_8 8=2\Rightarrow\overline{A_8B_8}:\overline{A_8C_8}=3:4$

故選(1)(2)(4)(5)。

6. (4)(5)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：熟悉矩陣的基本運算

解析：(1) ×：$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(2) ×：$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

(3) ×：若 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，則 $AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ 但 $BA=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\neq O$

(4) ○：若 $AB=I\Rightarrow B=A^{-1}\Rightarrow BA=A^{-1}A=I$

(5) ○：$(A+I)(A^2-A+I)=A^3+I$

故選(4)(5)。

7. (3)(4)

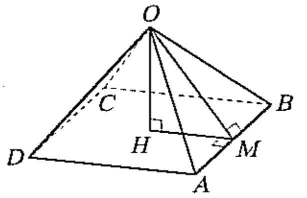
出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：三垂線定理及兩面角定義

解析：因為 $\overline{OH}$ 垂直平面 $ABCD$，$\overline{OM}$ 為等腰△OAB 之中線，

因此 $\overline{OM}$ 垂直 $\overline{AB}$

所以由三垂線定理知，$\overline{HM}$ 垂直 $\overline{AB}$

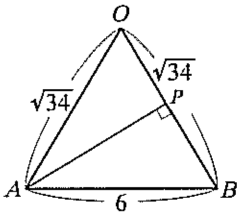


(1) ×：$\overline{OM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{34-9}=5$

(2) ×：$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OM}^2-\overline{MH}^2}=\sqrt{25-9}=4$

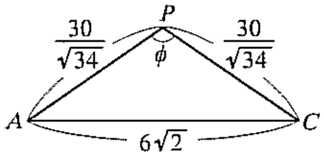
(3) ○：$\because\overline{OM}$ 垂直 $\overline{AB}$，且 $\overline{HM}$ 垂直 $\overline{AB}$ $\quad\therefore\angle OMH=\theta$

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{\overline{HM}}{\overline{OM}}=\dfrac{3}{5}$



(4) ○：令 $\overline{AP}$ 為 A 到 $\overleftrightarrow{OB}$ 的距離，△AOB 面積為 $\dfrac{6\times5}{2}=\dfrac{\sqrt{34}\times\overline{AP}}{2}$

$\Rightarrow\overline{AP}=\dfrac{30}{\sqrt{34}}$



(5) ×：承(4)，$\cos\phi=\dfrac{\left(\dfrac{30}{\sqrt{34}}\right)^2+\left(\dfrac{30}{\sqrt{34}}\right)^2-(6\sqrt{2})^2}{2\times\dfrac{30}{\sqrt{34}}\times\dfrac{30}{\sqrt{34}}}=-\dfrac{9}{25}$

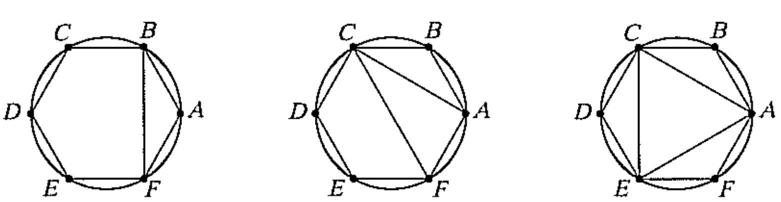
故選(3)(4)。

8. (1)(2)(3)

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計II〉

目標：數學期望值與機率的應用

解析：



事件	與△ABF 全等者	與△ACF 全等者	與△ACE 全等者
面積 m_i	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{4}$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$
機率 p_i	$\dfrac{6}{C_3^6}=\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{12}{C_3^6}=\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{2}{C_3^6}=\dfrac{1}{10}$

所求期望值為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{3}{10}+\dfrac{2\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{6}{10}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{9\sqrt{3}}{20}$

故選(1)(2)(3)。

9. (4)(5)

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量的坐標表示、參數式

解析：(1) ×：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(-3,4)+(7,-1)=(4,3)$

$\Rightarrow|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

(2) ×：令 A 點為 $(0,0)$，則 B 點為 $(-3,4)$，D 點為 $(7,-1)$，

因為 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$，$C$ 點為 $(7-3t,\ -1+4t)$

$\because ABCD$ 為等腰梯形

$\therefore \overline{AD}=\overline{BC}\Rightarrow(7-0)^2+(-1-0)^2=[7-3t-(-3)]^2+(-1+4t-4)^2$

$\Rightarrow t^2-4t+3=0\Rightarrow t=1$ 或 3

當 $t=1$ 時，C 點為 $(4,3)$（不合 $\because \overline{AB}=\overline{CD}$）

$t=3$ 時，C 點為 $(-2,11)$

故 $\overrightarrow{AC}=(-2,11)$

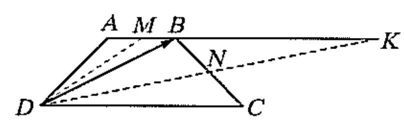
(3) ×：$\overrightarrow{DC}=(-9,12)$，$\overrightarrow{AB}=(-3,4)$

$\Rightarrow \overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{AB}$

(4) ○：$\because \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$

(5) ○：設 $\overrightarrow{DN}$ 交 $\overrightarrow{AB}$ 於 K 點



$\because N$ 為 $\overline{BC}$ 中點，且 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$

$\therefore \triangle CDN\cong\triangle BKN$

$\Rightarrow \overline{CD}=\overline{BK}=15$，$\overline{DN}=\overline{NK}$

又 M 為 $\overline{AB}$ 中點

$\therefore \overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \overline{BM}:\overline{BK}=\frac{5}{2}:15=1:6$

$\Rightarrow \overrightarrow{DB}=\frac{6}{7}\overrightarrow{DM}+\frac{1}{7}\overrightarrow{DK}=\frac{6}{7}\overrightarrow{DM}+\frac{2}{7}\overrightarrow{DN}$

故選(4)(5)。

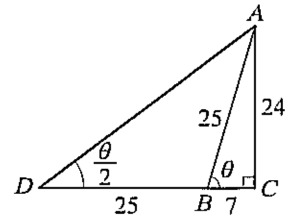
三、選填題

A. $\frac{3}{4}$

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：直角三角形的邊角關係

解析：$\because \sin\theta=\frac{24}{25}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$，假設 $\overline{AB}=25$，$\overline{AC}=24$



因此 $\overline{BC}=7$

又 $\overline{AB}=\overline{BD}=25$，

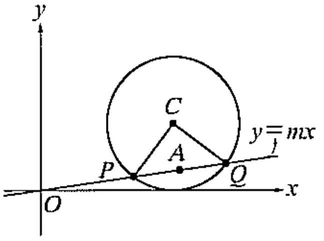
故 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$。

B. $\frac{1}{7}$

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：極值，點與直線的距離

解析：當$\angle PCQ$為直角時，$\triangle CPQ$面積為最大



$\overline{PC}=\overline{QC}=2$

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PC}^2+\overline{QC}^2}=\sqrt{8}$

$\overline{AC}=\frac{\overline{PC}\times\overline{QC}}{\overline{PQ}}=\frac{2\times 2}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$ （A 為 $\overline{PQ}$ 中點）

$C(4,2)$ 到直線 $L：mx-y=0$ 的距離 $d(C,L)=\overline{AC}=\sqrt{2}$

$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}\Rightarrow m=1$（不合）或 $m=\frac{1}{7}$。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\begin{bmatrix}\frac{5}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$；(2) $a_2=\frac{95}{64}$，$b_2=\frac{23}{32}$，$c_2=\frac{51}{64}$；(3) $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{4}$，$z=\frac{1}{4}$

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：熟悉轉移矩陣的應用與計算

解析：(1) 剛開始時，A 瓶有 a 公升的水，B 瓶有 b 公升的水，C 瓶有 c 公升的水。經過一輪後，

A 瓶有 $\frac{5a}{8}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2}$ 公升的水，B 瓶有 $\frac{a}{4}+\frac{b}{2}$ 公升的水，C 瓶有 $\frac{a}{8}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2}$ 公升的水

故轉移矩陣 $D=\begin{bmatrix}\frac{5}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{8}\\\frac{3}{4}\\\frac{7}{8}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{11}{8}\\\frac{3}{4}\\\frac{7}{8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{95}{64}\\\frac{23}{32}\\\frac{51}{64}\end{bmatrix}$，即 $a_2=\frac{95}{64}$，$b_2=\frac{23}{32}$，$c_2=\frac{51}{64}$

(3) $\begin{bmatrix}\frac{5}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z=0\\\frac{1}{4}x=\frac{1}{2}y\\\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}z=0\end{cases}$

$\Rightarrow x：y：z=2：1：1$

故 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{4}$，$z=\frac{1}{4}$。

二、(1) $(2,1)$ ；(2) $4\sqrt{2}+2\sqrt{6}$

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：能將複數化為極式、求出 a 的 n 個 n 次方根，及了解其幾何意義

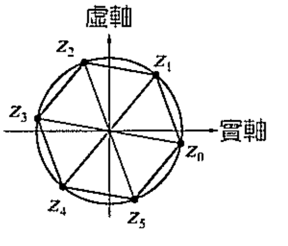
解析：$\because 4-4\sqrt{3}\,i=8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$\therefore 4-4\sqrt{3}\,i$ 的六次方根為 $z_k=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{18}\right)\right)$，$k=0$，1，2，3，4，5

即 $z_0=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right)$，$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{18}+i\sin\frac{5\pi}{18}\right)$，

$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{18}+i\sin\frac{11\pi}{18}\right)$，$z_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{18}+i\sin\frac{17\pi}{18}\right)$，

$z_4=\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{18}+i\sin\frac{23\pi}{18}\right)$，$z_5=\sqrt{2}\left(\cos\frac{29\pi}{18}+i\sin\frac{29\pi}{18}\right)$



(1) 如右圖，z_2，z_3 在第二象限，z_4 在第三象限，因此 $a=2$，$b=1$

所以數對 $(a,b)=(2,1)$ 。

(2) $\because |z_0-z_1|=|z_0-z_5|=\sqrt{2}$ ，$|z_0-z_3|=2\sqrt{2}$ ，$|z_0-z_2|=|z_0-z_4|$

設 $|z_0-z_2|=|z_0-z_4|=x$，

利用餘弦定理 $x^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{2}{3}\pi$

$\therefore x=\sqrt{6} \Rightarrow |z_0-z_2|=|z_0-z_4|=\sqrt{6}$

故 $|z_0-z_1|+|z_0-z_2|+|z_0-z_3|+|z_0-z_4|+|z_0-z_5|=4\sqrt{2}+2\sqrt{6}$