臺北市立復興高級中學105學年度第2次正式教師甄選

數學科教師甄選筆試題目卷

注意：本科試題共10題，每題10分。請確認試題題號、內容，並請考生注意時間掌握。

1 試求$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{2017}}{3}\right]$的值，其中$[x]$表示不大於$x$的最大整數。

2 設x,y,z為正實數，試證明：$\frac{x}{3x+y+z}+\frac{y}{x+3y+z}+\frac{z}{x+y+3z}\le\frac{3}{5}$。

3 設a,b,c,d為實數，已知$a^2+b^2=1$且$(c+3)^2+(d-4)^2=10$，試求$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$的最大值。

4 設數列$\langle a_n \rangle$滿足遞迴式$\begin{cases} a_1=\frac{1}{3} \\ a_n=a_{n-1}+\frac{2}{n^2+3n+2}, n\ge 2 \end{cases}$，試求$a_n$。

5 某手機公司共有甲、乙、丙三個生產線，依據統計，甲、乙、丙所製造的手機中分別有3%、1%、1%是瑕疵品。若公司希望在全部的瑕疵品中，由甲生產線所製造的比例不得超過$\frac{1}{4}$，則甲生產線所製造的手機數量可占全部手機產量的百分比至多為____%。

6 坐標空間中，若平面$E: ax+by+cz=1$滿足以下三條件：
(1) 平面E與平面$F: x+y+z=1$有一夾角為$30°$，
(2) 點$A(1,1,1)$到平面E的距離等於1，
(3) $a+b+c>0$，
試求$a+b+c$的值。

7 設a_1、a_2、a_3為實數且$a_1<a_2<a_3$，b_1、b_2、b_3為正實數，試證明：方程式$\frac{b_1}{x-a_1}+\frac{b_2}{x-a_2}+\frac{b_3}{x-a_3}=1$有三個相異實根。

8 設a、b、c為異於1之正數，且$\log_a 10+\log_b 10+\log_c 10=\log_{abc} 10$，試求$(abc)^4-(abc)^2(a^2+b^2+c^2)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$的值。

9 在坐標平面上，已知直線$x-2y+k=0$的圖形與$y=\sqrt{|x^2-2x|}$的圖形有四個相異交點，其中k為實數，試求k的範圍。

10 對於正整數n，設$(-1+i)^n=a_n+ib_n$，其中$i=\sqrt{-1}$且a_n,b_n為實數。已知矩陣T滿足$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，且坐標平面上異於原點的兩點$P$、$Q$經由矩陣T所定義的線性變換後分別映射到點$P'$、$Q'$，試證明：$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$且$\angle POQ=\angle P'OQ'$。