

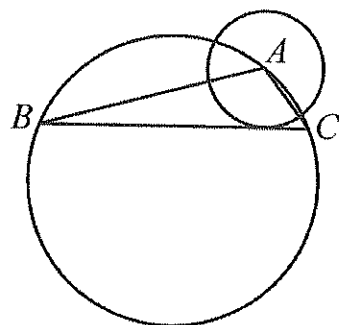
國立陽明高中 105 年第一次教師甄試數學科試題

一、填充題（請將標準答案完整填入格內，每題 4 分。）

1. 如右圖，大圓的半徑為 5，小圓的半徑為 2， A 在大圓的圓周上

且為小圓的圓心， \overline{BC} 為大圓的弦且與小圓相切。若 $\overline{AB} = 8$ ，

則 $\overline{AC} = ?$



2. 求極限值： $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} = ?$

3. 一種猜數字遊戲的規則如下：對手由 0~9 挑四個相異整數排成一列，寫下此四碼數字後，玩家挑選要猜的四碼數字，若其中 k 個數字相同位置也相同，以 kA 表示，若其中 t 個數字相同但位置錯誤，則以 tB 表示（例如：對手寫下的四位數為 1234，玩家猜 1290 表為 2A，玩家猜 3490 表為 2B，玩家猜 1903 則表為 1A1B），玩家要由猜的過程中，用最少步驟判斷出對手所寫下的四碼數字。今有一猜數字遊戲過程如下：

1347 (1A1B)

0589 (1A0B)

6452 (0A1B)

0372 (2A0B)

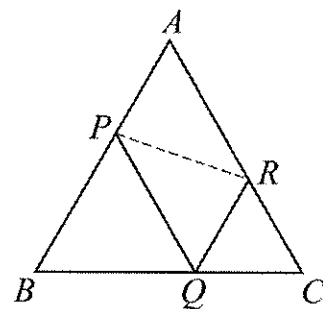
9671 (0A2B)

請判斷對手所寫下的四碼數字為何？

4. 若 P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，且 $3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + 5\overrightarrow{PC} = k\overrightarrow{AB}$ ，試求 k 的範圍。

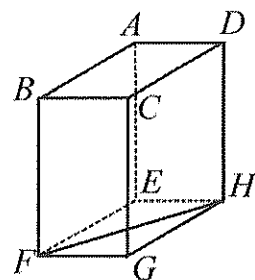
5. $x \in \mathbb{R}$ ，定義 (x) 為 x 的整數部分， $\{x\}$ 為 x 的小數部分，若 $\frac{(x)}{\{x\}} = \frac{x}{(x)}$ ，則 $x = ?$

6. 在邊長為 13 的正 $\triangle ABC$ 上各邊分別取一點 P 、 Q 、 R ，使得 $APQR$ 形成一平行四邊形，如右圖所示。若平行四邊形 $APQR$ 的面積為 $15\sqrt{3}$ ，則 $\overline{PR} = ?$



7. 求值： $\sum_{k=1}^{20} k(k+1)(k+2)(k+3) = ?$

8. 已知長方體 $ABCD-EFGH$ 如右圖所示，其中 $\overline{AB} = \overline{BF} = \sqrt{3}$ 且 $\overline{AD} = 1$ 。已知 \overline{FH} 上有一點 P ，求 $\overline{BP} + \overline{PG}$ 的最小值。



9. 連續擲一公正骰子四次其點數依序為 x_1, x_2, x_3, x_4 ，求 $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_1) \neq 0$ 的機率。
10. 有三正質數的積是其和的31倍，試求此三質數。

二、計算證明題（請在答案紙上標明題號並將過程寫下，無過程不計分，1、2 每小題 6 分，其餘每題 10 分。）

1. 請用非微積分的方法，完成以下題目：

(1) 若 $x, y \in \mathbb{R}$ 且滿足 $x^2 + 2y^2 = 1$ ，求 $4x + 2y^2$ 的最大值。

(2) 若 $x \in \mathbb{R}$ 且 $0 < x \leq 1$ ，求 $f(x) = x + \frac{2}{x}$ 的最小值。

(3) 若 $x \in \mathbb{R}$ ，求 $f(x) = \frac{2\cos x}{3 + \sin x}$ 的範圍。

2. (1) 已知 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩實根為 α 與 β ，試證：
$$\int_{\alpha}^{\beta} (ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{6} a(\alpha - \beta)^3。$$

(2) 已知一拋物線 $y = -x^2 + 4$ 及一直線 $y - 1 = m(x - 1)$ ，求兩者所圍的面積最小時 m 之值。

3. 直線 $y = \sqrt{3}x$ 上有一點 A ， x 軸上有一點 B ，圓 $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 4$ 上有一點 C 。求 $\triangle ABC$ 之最小周長。

4. 比較 $\sin 5^\circ + \sin 10^\circ + \sin 15^\circ$ 與 $\frac{1}{2}$ 的大小，並說明理由。

5. 設 $A(1, 3)$ 、 $B(1, 7)$ 、 $C(4, 3)$ ， $P(x, y)$ 為 $\triangle ABC$ 的內部一點， $\overline{PD} \perp \overline{BC}$ 交 \overline{BC} 於 D 點，

$\overline{PE} \perp \overline{AC}$ 交 \overline{AC} 於 E 點， $\overline{PF} \perp \overline{AB}$ 交 \overline{AB} 於 F 點，求 $\frac{\overline{BC}}{\overline{PD}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{PF}}$ 的最小值。