教育部受託辦理 105 學年度公立高級中等學校教師甄選

數學科 試題

請注意：本試題共兩部分，選擇題 12 題及綜合題 1 大題，共計 100 分；選擇題請用 **2B** 軟心鉛筆在<u>答案卡</u>劃記，綜合題請用藍色或黑色鋼筆或原子筆在<u>答案本</u>上作答。<u>本科不可以使用電子計算器</u>

第一部分：選擇題（共 40 分）

一、單選題（每題 3 分，共 24 分）

(A)1. 級數 $4^5+5^5+6^5+7^5+9^5+11^5=$？(A)$12^5$　(B)13^5　(C)14^5　(D)15^5

(C)2. 下列各選項中，哪一個值最大？

(A)$(\cos^2 25°-\sin^2 25°)$

(B)$\sqrt{1+\sin 340°}-\sqrt{1-\sin 340°}$

(C)$\sin 23°\cos 112°-\sin 292°\sin 67°$

(D)$\dfrac{2\tan 67.5°}{1-\tan^2 67.5°}$

(D)3. 設 t 為實數，若橢圓 Γ_1：$\dfrac{x^2}{t^2+1}+\dfrac{y^2}{7-t}=1$ 與雙曲線 Γ_2：$\dfrac{x^2}{75}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 有共同的焦點，則 t 值＝？

(A) 9　(B)5　(C)-7　(D)-10

(C)4. 設 x，y 均為正整數，滿足 $0<x<y$ 且 $\sqrt{2016}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$，則整數序對 (x,y) 共有多少組解？

(A)1組解　(B)3組解　(C)5組解　(D)7組解

(B)5. 擲一個公正骰子三次，所擲出的點數依序為 a、b、c，則使得多項式 $f(x)=a\cdot\dfrac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+b\cdot\dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+c\cdot\dfrac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$ 為二次函數的機率為？

(A)$\dfrac{8}{9}$　(B)$\dfrac{11}{12}$　(C)$\dfrac{23}{24}$　(D)$\dfrac{67}{72}$

(B)6. 有 A、B、C、D、E 五個觀光站，今規劃 5 天的觀光路線，每一天只觀光一站，且隔天必到另一站觀光，而每一站觀光次數不限。求第一天在 A 站，第 5 天在 C 站的觀光路線安排，共有幾種方法？

(A)50　(B)51　(C)52　(D)53

(A)7. 設 a 、b 皆為自然數，已知方程式 $x^2-4ax+4a^2-4a-3b+9=0$ 的兩根之差為 $2\sqrt{101}$ ，則滿足上述條件數對 (a,b) 有幾組？

(A)9組　(B)10組　(C)26組　(D)36組

(B)8. 設 k 為自然數，已知直線 $2x+3y=k$ 在第一象限內恰有 122 個格子點，則 k 的可能值有幾個？

(A)5個　(B)6個　(C)7個　(D)8個

二、複選題（每題 4 分，全對才給分，共 16 分）

(BCD)9.關於 $f(x)=3x^3-x^2-2x$ ，下列敘述何者正確？

(A)在點 $(1,f(1))$ 的切線方程式為 $y=5x$

(B)函數 $y=f(x)$ 的圖形與直線 $x=0$ ，$x=1$ ，$y=0$ 所圍區域面積為 $\dfrac{7}{12}$

(C)反曲點為 $(\dfrac{1}{9},\dfrac{-56}{243})$

(D)與 x 軸交於相異三點

(ACD)10.設有 A ，B ，C ，D 四筆資料如右表：

A	1	6	8	9	9	9
B	3	18	24	27	27	27
C	3	8	10	11	11	11
D	9	3	2	1	1	1

而 σ_A ，σ_B ，σ_C ，σ_D 分別表 A ，B ，C ，D 的標準差，

μ_A，μ_B，μ_C，μ_D 分別表 A ，B ，C ，D 的算術平均數，

r_1 ，r_2 ，r_3 分別表 A 與 B ，A 與 C 及 A 與 D 的相關係數，

則下列敘述何者正確？

(A) $\mu_B>\mu_C>\mu_A>\mu_D$

(B) $\sigma_B>\sigma_A>\sigma_C>\sigma_D$

(C) $r_1=r_2>r_3$

(D) $\sigma_A=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

(ABC)11.設 p 為整數且給定多項式 $f(x)=x^5-2px^4+x^3-3px^2+x-2$ ，則下列選項哪些是正確的？

(A) $x-1$ 一定不是 $f(x)$ 的因式

(B)若 $x+1$ 是 $f(x)$ 的因式，則 $x+2$ 也是 $f(x)$ 的因式

(C)若 $x+1$ 不是 $f(x)$ 的因式，則 $f(x)$ 一定沒有整係數的一次因式

(D) $(x+1)^2$ 可能是 $f(x)$ 的因式

(BC)12. $A=\begin{bmatrix}4&-3\\2&-1\end{bmatrix}$， $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$， 若 $P=\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}$， 且已知 $A=PBP^{-1}$ ，下列敘述何者正確？

(A) $A^2-3A-2I=O$

(B) $A^4-7A^3+10A^2-8A+3I=\begin{bmatrix}-37&36\\-24&23\end{bmatrix}$

(C) $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$

(D) $A^{10}=\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\-1&1\end{bmatrix}$

第二部分：綜合題（共 60 分）

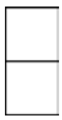
一、填充題(每格 4 分，共 44 分，**不必**詳列計算過程，請列出題號依序作答。)

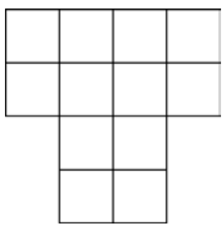
1.雙曲線 $\Gamma: x^2-y^2=9$ ，兩焦點 F_1 ，F_2 ，弦 $\overline{AB}$ 通過 F_1 ，且 $\overline{AB}$ 長為15，則 $\triangle ABF_2$ 的周長為 ___42___ 。

2.設 x ， $y\in\mathbb{R}$ ，則 $\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2+4}+\sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2+9}$ 的最小值為 ___$\sqrt{33}$___ ，此時 $(x,y)=$ ___$(-\frac{19}{5},\frac{14}{5})$___ 。

3.若 (x,y) 為不等式組 $\begin{cases}x+7y-4\ge 0\\4x-5y+17\ge 0\\5x+2y-20\le 0\end{cases}$ 所表示圖形上的任一點，且 $k=ax-y$ 在 $(4,0)$ 有最小值時，則實數 a 的範圍為 ___$a\le -\frac{5}{2}$___ 。

4.設數列〈 a_n 〉的遞迴關係式為 $\begin{cases}a_1=2\\a_{n+1}=2a_n-1\end{cases}$ ， $n\in N$ ，求滿足 $a_n>1000$ 的最小自然數 n 為 ___11___ 。

5.有一個房間的地面是由 12 個正方形所組成，如右圖。今想用長方形瓷磚鋪滿地面，已知每一塊長方形瓷磚可以覆蓋兩個相鄰的正方形，即  或  。則用 6 塊



瓷磚鋪滿房間地面的方法有 ___11___ 種。

6.設 P 是正方形$ABCD$ 內部一點，且 P 到 A、B、C 三頂點的距離分別為 1、2、3，求此正方形的面積為 ___$5+2\sqrt{2}$___。

7.設 ΔABC 是邊長為2的正三角形，已知 P 為 $\overline{AB}$ 上一點，Q 為 $\overline{BC}$ 上一點，且 $\overline{AP}+\overline{CQ}=1$。$\angle BPQ=45^\circ$，則 ΔBPQ 的面積為 ___$\frac{3}{4}\left(3-\sqrt{3}\right)$___。

8.坐標平面上，不等式 $\frac{|4x+7y|}{3}+\frac{|5x+2y|}{4}\le 1$ 所圍成的區域面積為 ___$\frac{8}{9}$___。

9.設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$，則矩陣 A 中各元的和為 ___12288___。

10.坐標平面上，由原點 O 作圓 $(x-6)^2+(y-7)^2=10$ 得兩切點為 A, B。設 P 為射線 OB 上一點，則 $\frac{\overline{PO}}{\overline{PA}}$ 的最大值為 ___$\frac{17\sqrt{30}}{60}$___。

二、計算題(每題 8 分，共 16 分，**必須**詳列計算過程，請列出題號依序作答，分段給分。)

1. 已知有一個正四面體的四頂點落在兩歪斜線 L_1：$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-2}=z-2$ 與 L_2：$2x=y=-2z+8$ 上，求此正四面體的稜邊長？

2. 已知 ΔABC 為邊長為 1 的正三角形，設 $\overline{BC}$ 邊上有 $n-1$ 個等分點，由 B 點到 C 點的順序為 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_{n-1}$，且令 $B=P_0$，$C=P_n$。若 $S_n=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}+\overrightarrow{AP_2}\cdot\overrightarrow{AP_3}+\cdots+\overrightarrow{AP_{n-1}}\cdot\overrightarrow{AC}$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$。