

臺北市立建國高級中學 100 學年度科學班甄選

數學能力測驗 試題卷

准考證號

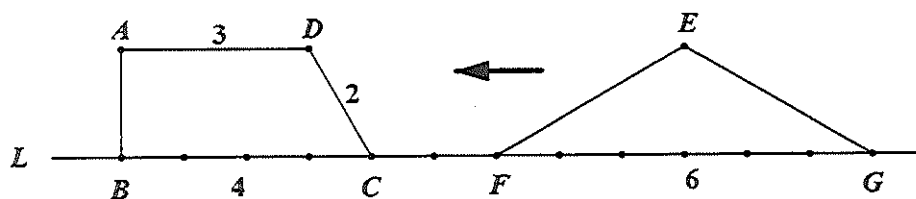
- ※ 注意事項：1. 測驗時間為 80 分鐘。
 2. 請核對答案卷號及准考證號二者是否相同。並於本試題卷右上角標示准考證號。
 3. 可利用試題卷空白處計算。
 4. 試題卷務必連同答案卷（均請勿書寫姓名）一併繳回。

一、多重選擇題：

說明：每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 7 分，只答錯一個選項者可得 4 分，答錯兩個或兩個以上選項者不給分。

- 已知二次函數 $y=x^2-2ax+b$ (其中 a, b 均是不為 0 的實數) 的圖形與 x 軸交於 A, B 兩相異點，與 y 軸交於 C 。作 $\triangle ABC$ 的外接圓，此圓又與 y 軸交於另一點 D ，試問下列哪些敘述是正確的？
 - (1) $a^2-b>0$
 - (2) A, B 兩點必落在 y 軸的左右兩側
 - (3) C 點必在 x 軸上方
 - (4) $\triangle ABC$ 的外接圓其圓心 x 坐標為 a
 - (5) D 點的 y 坐標為 1
- 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 a, b, c ，則下列哪些選項中的三數一定可以構成一個三角形的三邊長？
 - (1) $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$
 - (2) a^2, b^2, c^2
 - (3) $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$
 - (4) $|a-b|, |b-c|, |c-a|$
 - (5) $\frac{a+b-c}{2}, \frac{b+c-a}{2}, \frac{c+a-b}{2}$

- 如下圖，在直角梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\overline{AD} = 3$ 公分， $\overline{CD} = 2$ 公分， $\overline{BC} = 4$ 公分。在等腰 $\triangle EFG$ 中， $\angle FEG = 120^\circ$ ，底邊 $\overline{FG} = 6$ 公分。點 B, C, F, G 在同一條直線 L 上，且 $\overline{CF} = 2$ 公分。



若等腰 $\triangle EFG$ 以 1 公分/秒的速度沿直線 L 等速度向直角梯形 $ABCD$ 運動，若 t 秒時直角梯形 $ABCD$ 與等腰 $\triangle EFG$ 重合部分的面積記為 S 平方公分。則下列何者正確？

- (1) $t=6$ 時， $S=2\sqrt{3}$
- (2) $6 < t < 8$ 時， S 的形狀為一個五邊形
- (3) $8 \leq t < 9$ 時， S 的形狀為一個四邊形
- (4) $9 \leq t < 12$ 時， S 的最大值為 $\sqrt{3}$
- (5) $6 < t < 8$ 時， S 的最大值為 $\frac{13}{5}\sqrt{3}$

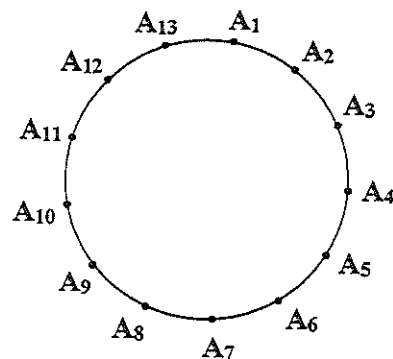
4. 在圓周上有相異的 13 點，依順時針方向依序在各點標上符號 A_1, A_2, \dots, A_{13} 。今選擇紅、藍、綠、黃四種顏色中之一色對此 13 點著色，著色的規定如下：

(甲) 若某點著了紅色或藍色時，則此點順時針方向後的第 1 點和第 7 點不可著藍色也不可著綠色；

(乙) 若某點著了黃色或綠色時，則此點順時針方向後的第 1 點和第 7 點不可著紅色也不可著黃色。

則針對這 13 點的所有可能著色結果，下列推論何者正確？

- (1) 若 A_1 著紅色，則 A_8 必著紅色
- (2) 若 A_1 著紅色，則 A_9 必著藍色
- (3) 若 A_1 著綠色，則 A_{10} 必著綠色
- (4) 若 A_1 著綠色，則 A_{11} 必著黃色
- (5) 這相異 13 點著色方法數有四種

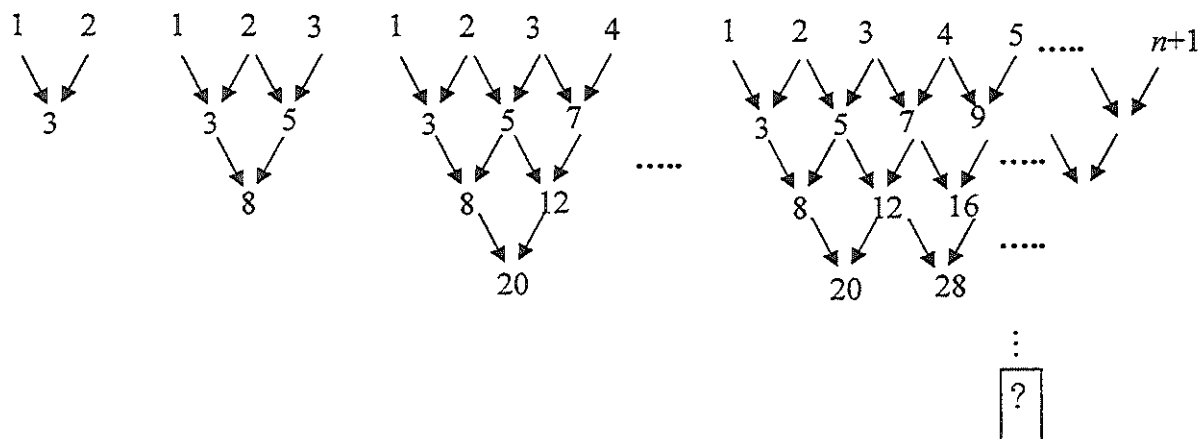
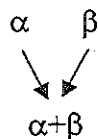


二、填充題：（每題完全答對得 7 分，答錯不倒扣。）

1. 已知有 k 個數列，每個數列都是由連續的正整數所組成，且每個數列的和皆為 500，則這 k 個數列的首項中最小的數為 _____。

2. 已知最簡分數 Q 滿足 $0 < Q < 6$ 且分母為 42，若所有滿足條件的 Q 有 m 項，總和為 n 。求 $m =$ _____。 $n =$ _____。

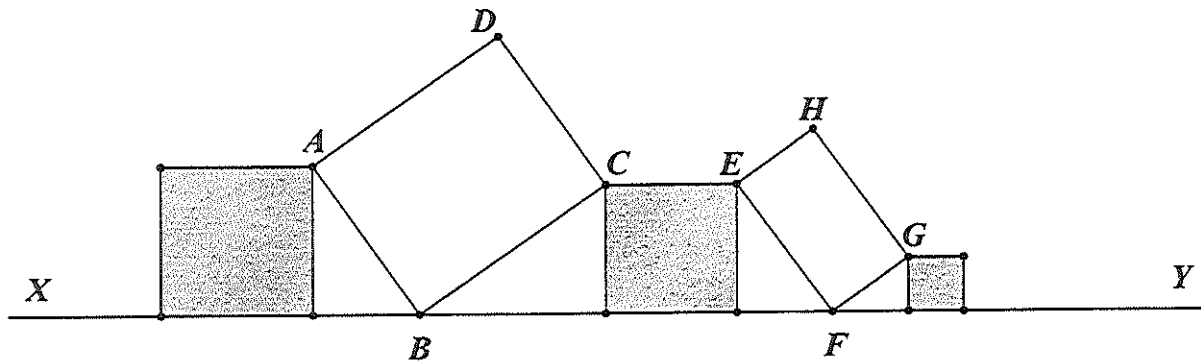
3. 下面一系列的圖形，隱藏了一些規則，即



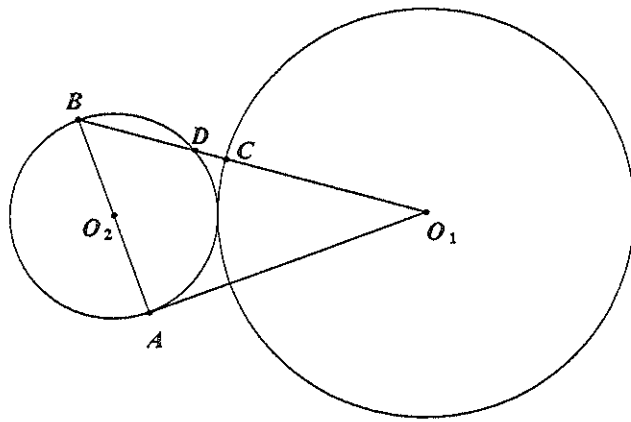
第 1 個圖 第 2 個圖 第 3 個圖 第 n 個圖

令在第 1 個圖、第 2 個圖、第 3 個圖、...、第 n 個圖中最下面一層的唯一數字分別為 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 。如上圖，其中 $a_1=3, a_2=8, a_3=20$ 。則當 $n=2011$ 時，最下面一層唯一的數字 $a_{2011} =$ _____。

4. 已知下圖中有三個正方形(其中一邊在線段 \overline{XY} 上)及兩個長方形 $ABCD$ 、 $EFGH$ ，而其中 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{BC} = \sqrt{6}$ ， $\overline{EF} = \sqrt{3}$ ， $\overline{FG} = 1$ ，求圖中的三個正方形(灰色區域)面積和為_____。



5. 如下圖，已知圓 O_1 與圓 O_2 相外切，圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 2、1， $\overline{O_1A}$ 為圓 O_2 的切線，其中 A 為切點，又已知 \overline{AB} 為圓 O_2 的直徑，線段 $\overline{O_1B}$ 分別交圓 O_1 與圓 O_2 於點 C 、 D ，則 \overline{CD} 的長為_____。

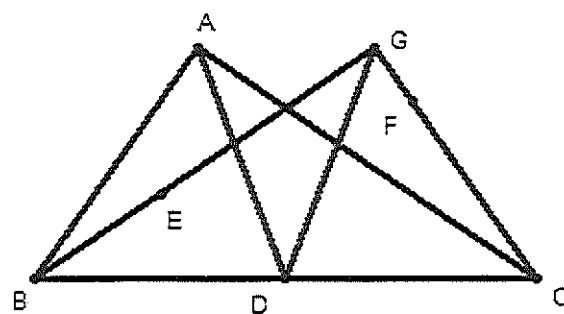


6. 設圓 O 的半徑為 20， P 為圓 O 內部一點，已知過 P 點的弦中，長度為整數的共有 32 條，試求 $\overline{OP} =$ _____。

7. 已知『坐標平面上的格子點是指：點的 x, y 坐標皆為整數』。當 P 的坐標為 (a, b) 時，若 $a+b$ 除以 4 所得的餘數分別為 0, 1, 2, 3 時， P 點分別向右、上、左、下移動一個單位，若 P 點從某個格子點 (m, n) 出發，按照上述規則移動 6 次， P 點走到了點 $(3, 10)$ ，則 (m, n) 的可能位置為_____。

三、計算證明題：(本大題共有二題計算證明題，請必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。)

- (一) 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， \overline{AD} 為 \overline{BC} 邊上的中線，而 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ADC$ 的外心分別為 E 、 F ，直線 BE 與 CF 交於點 G ，且 $\overline{BC} = 2\overline{DG}$ ，試證明：



- (1) $\triangle BGC$ 為直角三角形。 (5分)
 (2) A 、 G 、 C 、 B 四點共圓。 (6分)

- (二) 設 a, b, c 為實數，其中 $a \neq 0$ ，令函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ， $g(x) = ax + b$ ，已知當 $-1 \leq x \leq 1$ 時， $|f(x)| \leq 5$ ，試證：
- (1) 當 $-1 \leq x \leq 1$ 時， $|g(x)| \leq 10$ 。 (6分)
 (2) 若已知當 $-1 \leq x \leq 1$ 時， $g(x)$ 的最大值為 10，則 $f(x) = ?$ (6分)