國立彰化高級中學 105 學年度教師甄選 數學科試題

說明:

(A) 測驗時間: 120 分鐘

(B) 第 1 題到第 13 題，每題 5 分；第 14 題到第 18 題 7 分；滿分 100 分。答案卷上請標題號，需計算過程(或想法)，否則，不予計分。

1. 下列方程組

$$\begin{cases} x+y=3(z+u) \\ x+z=4(y+u) \\ x+u=5(y+z) \end{cases}$$

的解(x,y,z,u)，其中x、y、z與u皆為正整數，求x可能的最小值為何?

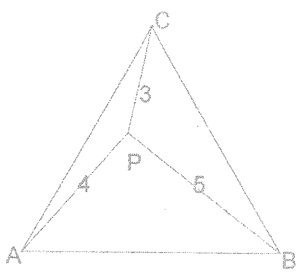
2. 設甲乙兩袋球，甲袋有一白球一黑球，乙袋有一白球，從甲袋隨機取一球放入乙袋，再從乙袋隨機取一球放回甲袋，完成這樣的動作稱為一局，試求n局後甲袋有一白球一黑球的機率為何?

3. 求$\left(\sqrt{9+\sqrt{17}}\right)^3-\left(\sqrt{9-\sqrt{17}}\right)^3=?$

4. 若a,b,c,d,e,f均為實數，$f(x)=x^8-4x^7+7x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$有8個實係數一次因式，求$f(x)=?$

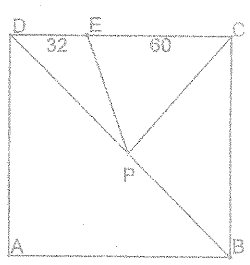
5. 試求函數$f(x)$，對任意實數$x, |x|\neq 1$，滿足$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)=x$

6. P 為正三角形ΔABC內的一點(如下圖)，其中$\overline{PA}=4$、$\overline{PB}=5$、$\overline{PC}=3$，試求ΔABC的面積。



7. 若多項式$(1+x+x^2+x^3+x^4)^{11}=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{43}x^{43}+x^{44}$，試求$a_6=?$

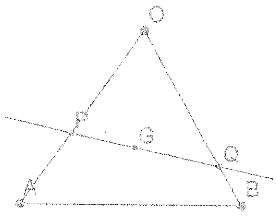
8. 有一正方形 ABCD(如下圖)，其中 E 點為$\overline{CD}$邊上的點且$\overline{DE}=32$、$\overline{EC}=60$，P 點為對角線$\overline{BD}$上一動點，試問兩線段和$\overline{PE}+\overline{PC}$的最小值為何？



9. 設$x,y\in R$，則$\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+9}+\sqrt{x^2+y^2+6x-4y+38}$的最小值為何?

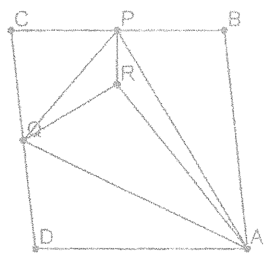
10. 在1^2、2^2、…、2016^2這些數中十位數的數字為奇數的數共有幾個?

11. 設G為ΔOAB 的重心G，過G的直線與$\overline{OA}$、$\overline{OB}$交於P、Q兩點(如圖)， 若$\overline{OP}=h\overline{OA}$，$\overline{OQ}=k\overline{OB}$，且$\frac{\Delta OPQ面積}{\Delta OAB面積}=\frac{9}{20}$，則$h^2+k^2$之值為何？



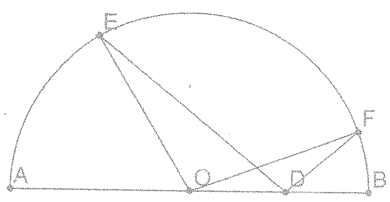
12. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=e$，求$a=$?

13. 如圖，設正方形$ABCD$之邊長為1，而P,Q依次為$\overline{BC}$，$\overline{CD}$之中點，若將此正方形沿$\overline{AP}$，$\overline{AQ}$，$\overline{PQ}$向上摺起，使B，C，D三點重合為一點R，則四面體$R-APQ$中，ΔAPQ面上的高為多少?



14. $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2015^2}+\frac{1}{2016^2}}=$?

15. 如圖，若$\overline{AB}$為直徑，O為圓心，E、F為圓上兩相異點，D在$\overline{OB}$上且$\angle OED=\angle OFD=20°$，$\angle AOE=60°$，求$\angle BOF=$?



16. 相異三複數z_1,z_2,z_3且$z_1^3=z_2^3=z_3^3=1+i$，$Arg(z_1)=\theta_1,Arg(z_2)=\theta_2,Arg(z_3)=\theta_3$，求$tan\theta_1+tan\theta_2+tan\theta_3=$?

17. 若對$n=4,6,8,10$，實數a,b,c,d滿足$\frac{a^2}{n^2-3^2}+\frac{b^2}{n^2-5^2}+\frac{c^2}{n^2-7^2}+\frac{d^2}{n^2-9^2}=1$，求$a^2+b^2+c^2+d^2=$?

18. $a,b,c\in R^+$，證明$3(a^3+b^3+c^3)\geq(a+b+c)(ab+bc+ca)$。