

# 國立中央大學附屬中壢高級中學 105 學年度第 1 次教師甄選 數學科筆試題目卷

## ※ 注意事項

答案卷共有 5 張，填充題請依題號順序於第 1 張答案卷作答；計算題亦請依題號順序於第 2 張答案卷作答。題號標示不清、書寫頁次不符者不予計分。其餘第 3~5 張可為計算之用。

一、填充題：(每題 7 分，共 70 分)

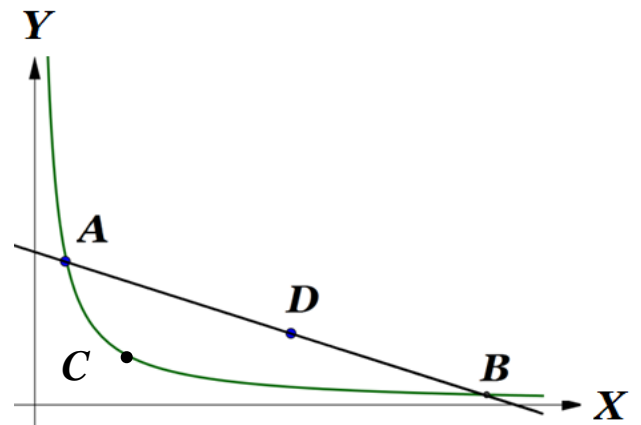
1. 若數列  $\{a_n\}$  滿足  $a_1=1$ ， $\sqrt{a_n}=2\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n a_{n+1}}$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，求數列  $\{a_n\}$  的一般項  $a_n =$ \_\_\_\_\_。

2. 設  $[ ]$  表高斯符號，試解方程式  $4x^2 - 20[x] + 23 = 0$ ， $x =$ \_\_\_\_\_。

3. 若  $\sqrt{x^2 + (mx - 3m + 2)^2} + \sqrt{x^2 + (mx - 3m + 10)^2} = 10$  有兩相異實根，求  $m$  之範圍為\_\_\_\_\_。

4. 有一個四邊形邊長為 15, 15, 15, 20，它的四個頂點都在同一個圓上。今在此圓外畫一外切正方形，請問這個正方形面積為\_\_\_\_\_平方單位。

5. 如圖，雙曲線  $\Gamma: xy=1$  在第一象限中，一弦  $\overline{AB}$  以  $D(4,1)$  為中點， $C$  點在  $\Gamma$  部分曲線  $AB$  上(即直線  $AB$  下方第一象限中的  $\Gamma$  曲線)，求  $C$  點到弦  $\overline{AB}$  距離的最大值為\_\_\_\_\_。



6. 設  $[ ]$  表高斯符號，求  $\left[ \frac{10^{10000}}{10^{100} + 1} \right] \div 100$  的餘數為\_\_\_\_\_。

7.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{1+3^{2n}} + \sqrt[n]{3^{2n}+5^{2n}} + \sqrt[n]{5^{2n}+7^{2n}} + \dots + \sqrt[n]{(2m-1)^{2n} + (2m+1)^{2n}}}{m^3} \right) \right) =$ \_\_\_\_\_。

8. 設  $[ ]$  表高斯符號， $|x|$  表絕對值符號，求不等式  $\log_2 \left\{ \log_2 \left( \left| x - \left[ \frac{x+1}{2} \right] \right| \right) \right\} < 0$  的解為\_\_\_\_\_。

9. 9 個不同的物品存放於 3 個相同的箱子，允許箱子有空物的情況，則有\_\_\_\_\_種分法。

10. 設複數  $w, z$  滿足  $|w|=1$ ， $|z|=10$ ，設  $\theta = \arg\left(\frac{w-z}{z}\right)$ ，求  $\tan^2 \theta$  的最大值為\_\_\_\_\_。

二、計算題(每題 15 分，共 30 分)

1. 設函數  $f(x)$  滿足  $x^2 f(x) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{2}ax^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\int_0^x t f(t) dt$ ，且  $f(0)=0$ ，其中  $a$  為定值，

(1) 求  $f(x)$  (6 分)

(2) 若  $x$  軸與  $y=f(x)$  所圍區域的面積為  $S(a)$ ，求  $S(a)$ 。(7 分)

(3) 求  $S(a)$  的最小值。(2 分)

2. 設  $\omega = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ ，則  $(2-\omega)(2-\omega^3)(2-\omega^5)$  之值為？(15 分)