

105 年大學入學學力測驗數學試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（佔 65 分）

一、單選題（佔 30 分）

1. 設 $f(x)$ 為二次實係數多項式，已知 $f(x)$ 在 $x=2$ 時有最小值 1 且 $f(3)=3$ 。
請問 $f(1)$ 之值為下列哪一選項？

- (1) 5 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 條件不足，無法確定

【105 學測】

答：(3) **(第一冊第二章—二次函數)**

解： $f(x) = a(x-2)^2 + 1$ $\xrightarrow{\text{過}(3,3)}$ $a+1=3 \Rightarrow a=2$

$$f(x) = 2(x-2)^2 + 1 \Rightarrow f(1) = 3$$

解：二次函數對稱軸 $x=2$ ，過 $(3,3)$ ，必過 $(1,3)$

2. 請問 $\sin 73^\circ$ 、 $\sin 146^\circ$ 、 $\sin 219^\circ$ 、 $\sin 292^\circ$ 、 $\sin 365^\circ$ 這五個數值的中位數是哪一個？

- (1) $\sin 73^\circ$ (2) $\sin 146^\circ$ (3) $\sin 219^\circ$ (4) $\sin 292^\circ$ (5) $\sin 365^\circ$ 【105 學測】

答：(5) **(第三冊第一章—廣義三角函數)**

解：由小而大排序

$$\sin 292^\circ = -\sin 68^\circ, \sin 219^\circ = -\sin 39^\circ, \sin 365^\circ = \sin 5^\circ, \sin 146^\circ = \sin 34^\circ, \sin 73^\circ$$

3. 座標平面上兩個圖形 Γ_1 、 Γ_2 的方程式分別為： $\Gamma_1 : (x+1)^2 + y^2 = 1$ 、 $\Gamma_2 : (x+y)^2 = 1$ 。
請問 Γ_1 、 Γ_2 共有幾個交點？

- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個

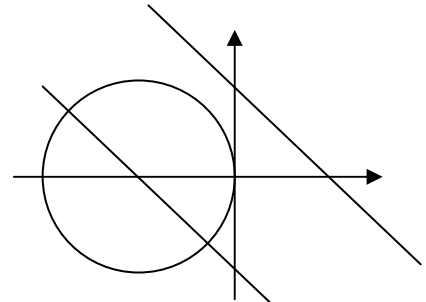
【105 學測】

答：(2) **(第三冊第二章—直線與圓)**

解： $\Gamma_1 : (x+1)^2 + y^2 = 1$ ，圓心 $(-1, 0)$ ，半徑 1

$$\Gamma_2 : (x+y)^2 = 1, \text{兩平行線 } x+y = \pm 1$$

兩圖形交於兩點（如右圖）



4. 放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。
鉛製容器中有兩種放射性物質 A 、 B ，開始紀錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，
而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 7.5 小時，
請問物質 B 的半衰期為幾小時？

- (1) 8 小時 (2) 10 小時 (3) 12 小時 (4) 15 小時 (5) 20 小時 【105 學測】

答：(1) **(第一冊第三章—指數)**

$$\text{解：} \begin{cases} m = 2k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{7.5}} \\ m = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{T_B}} \end{cases} \xrightarrow{\text{相除}} 1 = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{7.5} - \frac{120}{T_B}} \Rightarrow \frac{120}{7.5} - \frac{120}{T_B} = 1 \Rightarrow T_B = 8$$

5. 座標空間中一質點自點 $P(1,1,1)$ 沿著方向 $\vec{a} = (1,2,2)$ 等速直線前進，經過 5 秒後剛好到達平面 $x - y + 3z = 28$ 上，

立即轉向沿著方向 $\vec{b} = (-2,2,-1)$ 依同樣的速率等速直線前進。

請問再經過幾秒此質點會剛好到達平面 $x = 2$ 上？

- (1) 1 秒 (2) 2 (3) 3 秒 (4) 4 秒 (5) 永遠不會到

【105 學測】

答：(2) **(第四冊第二章—空間中的直線與平面)**

解：
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t, \text{ 代入 } x - y + 3z = 28, \text{ 得 } t = 5, \text{ 此時點在 } (6, 11, 11) \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 - 2s \\ y = 11 + 2s, \text{ 代入 } x = 2, \text{ 得 } s = 2 \\ z = 11 - s \end{cases}$$

6. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等比數列。已知前十項的和為 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 80$ ，

前五個奇數項的和為 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 120$ ，請選出首項 a_1 的正確範圍。

- (1) $a_1 < 80$ (2) $80 \leq a_1 < 90$ (3) $90 \leq a_1 < 100$
 (4) $100 \leq a_1 < 110$ (5) $110 \leq a_1$

【105 學測】

答：(4) **(第二冊第一章—等比數列級數)**

解：
$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{a_1 [1 - r^{10}]}{1 - r} = 80, \text{ 且 } a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{a_1 [1 - r^{10}]}{1 - r^2} = 120$$

故 $r = -\frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{80 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{10}} \approx 80 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \approx 106.6 \dots$

解： $(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9)r = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 120r$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \underbrace{a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9}_{120} + \underbrace{a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}}_{120r} = 80 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{a_1 \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{10}\right]}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 80 \Rightarrow \frac{a_1 [1 - 0]}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} \approx 80, \text{ 故 } a_1 \approx 80 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \approx 106.6 \dots$$

二、多選題 (佔 35 分)

7. 下列各方程式中，請選出有實數解的選項。

- (1) $|x| + |x-5| = 1$ (2) $|x| + |x-5| = 6$ (3) $|x| - |x-5| = 1$
 (4) $|x| - |x-5| = 6$ (5) $|x| - |x-5| = -1$

【105 學測】

答：(2)(3)(5) (**第一冊第一章一實數絕對值**)

解：(1)無解 (2) $x = \frac{11}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ (3) $x = 3$ (4)無解 (5) $x = 2$

解： $|x| + |x-5| = |x| + |5-x| \geq |(x) + (5-x)| = 5$ ，故(1)錯(2)對
 $|x| - |x-5| = |x| - |5-x| \leq |(x) - (5-x)| = 5$ ，故(4)錯(3)(5)對

8. 下面是甲、乙兩個商場的奇異果以及蘋果不同包裝的價格表，

例如：甲商場奇異果價格「35 元/一袋 2 顆」表示每一袋有 2 顆奇異果，價格 35 元。

甲商場售價

奇異果價格	20 元/一袋 1 顆	35 元/一袋 2 顆	80 元/一袋 5 顆	100 元/一袋 6 顆
蘋果價格	45 元/一袋 1 顆	130 元/一袋 3 顆	260 元/一袋 6 顆	340 元/一袋 8 顆

乙商場售價

奇異果價格	18 元/一袋 1 顆	50 元/一袋 3 顆	65 元/一袋 4 顆	95 元/一袋 6 顆
蘋果價格	50 元/一袋 1 顆	190 元/一袋 4 顆	280 元/一袋 6 顆	420 元/一袋 10 顆

依據上述數據，請選出正確的選項。

- (1) 在甲商場買一袋 3 顆裝的蘋果所需金額低於買三袋 1 顆裝的蘋果
 (2) 乙商場的奇異果售價，一袋裝越多顆者，其每顆單價越低
 (3) 若只想買奇異果，則在甲商場花 500 元最多可以買到 30 顆奇異果
 (4) 如果要買 12 顆奇異果和 4 顆蘋果，在甲商場所需最少金額低於在乙商場所需最少金額
 (5) 無論要買多少顆蘋果，在甲商場所需最少金額都低於在乙商場所需最少金額

【105 學測】

答：(1)(2)(4)

解：(1) 在甲買一袋 3 顆裝蘋果所需金額 (130 元)，低於買三袋 1 顆裝的蘋果 (135 元)

(2) 乙奇異果售價，一袋裝越多顆者，每顆單價越低 ($18 > \frac{50}{3} > \frac{65}{4} > \frac{95}{6}$)

(3) 在甲花 500 元最多可以買到 31 顆奇異果 (一袋 5 顆的 6 袋，一袋 1 顆的 1 袋)

(4) 買 12 顆奇異果和 4 顆蘋果，

在甲所需最少金額 $(80 + 80 + 35) + (130 + 45) = 370$

低於在乙所需最少金額 $(95 + 95) + (190) = 380$

(5) 買 10 顆蘋果，在甲所需最少金額 (430 元) 高於在乙所需最少金額 (420 元)

9. 下列各直線中，請選出和 z 軸互為歪斜線的選項。

- (1) $L_1 : \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ (2) $L_2 : \begin{cases} y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$ (3) $L_3 : \begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$
 (4) $L_4 : \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ (5) $L_5 : \begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases}$

【105 學測】

答：(3)(5) (**第四冊第二章一空間中的直線與平面**)

- 解**：(1) $L_1 : \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ ，即 y 軸。會與 z 軸相交於原點
- (2) $L_2 : \begin{cases} y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$ ，會與 z 軸交於 $(0, 0, 1)$
- (3) $L_3 : \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=0 \end{cases}$ ，會與 z 軸： $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=s \end{cases}$ 不平行也不相交，兩者確為歪斜
- (4) $L_4 : \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ ，會與 z 軸平行
- (5) $L_5 : \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ ，會與 z 軸： $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=s \end{cases}$ 不平行也不相交，兩者確為歪斜

10. 設 a 、 b 、 c 皆為正整數，考慮多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$ 。

請選出正確的選項。

- (1) $f(x) = 0$ 無正根 (2) $f(x) = 0$ 一定有實根
 (3) $f(x) = 0$ 一定有虛根 (4) $f(1) + f(-1)$ 的值是偶數
 (5) 若 $a + c > b + 3$ ，則 $f(x) = 0$ 有一根介於 -1 與 0 之間

【105 學測】

答：(1)(4)(5) (**第一冊第二章—多項函數**)

解：(1) $x > 0$ 時， $f(x) > 0$ 恆成立

(2) 反例： $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 2)$ ，四根均為虛根

(3) 反例： $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + x - 2)$ ，四根均為實根

(4) $f(1) + f(-1) = 2 + 2b + 4$ 的值是偶數

(5) 若 $a + c > b + 3$ ，則 $f(-1) = -a + b - c + 3 < 0$ ， $f(0) = 2 > 0$

故 $f(x) = 0$ 有一根介於 -1 與 0 之間

11. 一個 41 人的班級某次數學考試，每個人的成績都未超過 59 分。

老師決定以下列方式調整成績：原始成績為 x 分的學生，

新成績調整為 $40 \log_{10} \left(\frac{x+1}{10} \right) + 60$ 分（四捨五入到整數）。請選出正確的選項。

- (1) 若某人原始成績是 9 分，則新成績為 60 分
 (2) 若某人原始成績超過 20 分，則其新成績超過 70 分
 (3) 調整後全班成績的全距比原始成績的全距大
 (4) 已知小文的原始成績恰等於全班原始成績的中位數，
 則小文的新成績仍然等於調整後全班成績的中位數
 (5) 已知小美的原始成績恰等於全班原始成績的平均，
 則小美的新成績仍然等於調整後全班成績的平均（四捨五入到整數）

【105 學測】

答：(1)(2)(4) (**第二冊第四章—統計**)

解：(1) 新成績為 $40 \log_{10} 1 + 60 = 0 + 60 = 60$ 分

(2) 其新成績 $> 40 \log_{10} \left(\frac{21}{10} \right) + 60 \approx 72.888$ ，超過 70 分

(3) 原分數 59、49，原全距 10

新分數 $40 \log_{10} \left(\frac{60}{10} \right) + 60 = 91.124$ 、 $40 \log_{10} \left(\frac{50}{10} \right) + 60 = 87.96$ ，新全距 3.164

(4) 因為 $40 \log_{10} (x+1) + 20$ 係連續嚴格增函數，故正確

(5) 非線性關係，故錯誤

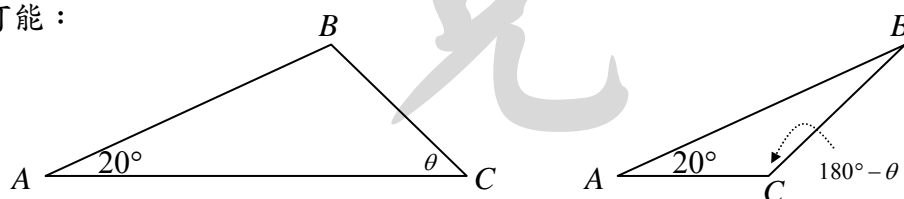
12. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 20^\circ$ 、 $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{BC} = 4$ 。請選出正確的選項。

- (1) 可以確定 $\angle B$ 的餘弦值 (2) 可以確定 $\angle C$ 的正弦值
(3) 可以確定 $\triangle ABC$ 的面積 (4) 可以確定 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑
(5) 可以確定 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑

【105 學測】

答：(2)(5) (第三冊第一章—三角)

解：原圖可能：



- (1) $\angle B$ 可能有兩種，無法確定餘弦值
(2) $\angle C$ 不論銳角或鈍角，因彼此互補，其正弦值均相等
(3) 不能確定 \overline{AC} ，故不確定 $\triangle ABC$ 的面積
(4) 不確定 $\triangle ABC$ 的面積，故不確定 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑
(顯然左圖內切圓半徑大，右圖內切圓半徑小)
(5) 由 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{4}{\sin 20^\circ} = 2R$ ，可以確定 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑

13. 甲、乙、丙、丁四位男生各騎一台機車約 A、B、C、D 四位女生一起出遊，他們約定讓四位女生依照 A、B、C、D 的順序抽鑰匙來決定搭乘哪位男生的機車。其中除了 B 認得甲的機車鑰匙，並且絕對不會選取之外，每個女生選取這些鑰匙的機會都均等。請選出正確的選項。

- (1) A 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到甲的鑰匙的機率
(2) C 抽到甲的鑰匙的機率大於 D 抽到甲的鑰匙的機率
(3) A 抽到乙的鑰匙的機率大於 B 抽到乙的鑰匙的機率
(4) B 抽到丙的鑰匙的機率大於 C 抽到丙的鑰匙的機率
(5) C 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到乙的鑰匙的機率

【105 學測】

答：(4)(5) (第二冊第三章—機率)

解：(1) A 抽到甲鑰匙的機率 $\frac{1}{4}$ ，
A 甲

$$\text{小於 C 抽到甲鑰匙的機率} = \underbrace{\frac{3}{4}}_{A \text{ 非甲}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{B \text{ 非甲}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{C \text{ 甲}} = \frac{3}{8}$$

$$(2) C \text{ 抽到甲鑰匙的機率 } \underbrace{\frac{3}{4}}_{A \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{B \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{C \text{甲}} = \frac{3}{8},$$

$$\text{等於 } D \text{ 抽到甲鑰匙的機率 } \underbrace{\frac{3}{4}}_{A \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{B \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{C \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{1}{1}}_{D \text{甲}} = \frac{3}{8}$$

$$(3) A \text{ 抽到乙鑰匙的機率 } \underbrace{\frac{1}{4}}_{A \text{乙}},$$

$$\text{小於 } B \text{ 抽到乙鑰匙的機率 } \underbrace{\frac{1}{4}}_{A \text{甲}} \times \underbrace{\frac{1}{3}}_{B \text{乙}} + \underbrace{\frac{2}{4}}_{A \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{B \text{乙}} = \frac{1}{3}$$

$$(4) B \text{ 抽到丙鑰匙的機率 } \underbrace{\frac{1}{4}}_{A \text{甲}} \times \underbrace{\frac{1}{3}}_{B \text{丙}} + \underbrace{\frac{2}{4}}_{A \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{B \text{丙}} = \frac{1}{3},$$

$$\text{大於 } C \text{ 抽到丙鑰匙的機率 } \underbrace{\frac{1}{4}}_{A \text{甲}} \times \underbrace{\frac{2}{3}}_{B \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{C \text{丙}} + \underbrace{\frac{2}{4}}_{A \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{1}{4}}_{B \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{C \text{丙}} = \frac{5}{24}$$

$$(5) C \text{ 抽到甲鑰匙的機率 } \underbrace{\frac{3}{4}}_{A \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{B \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{C \text{甲}} = \frac{3}{8},$$

$$\text{大於 } C \text{ 抽到乙鑰匙的機率 } \underbrace{\frac{1}{4}}_{A \text{甲}} \times \underbrace{\frac{2}{3}}_{B \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{C \text{乙}} + \underbrace{\frac{2}{4}}_{A \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{B \text{非甲}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{C \text{乙}} = \frac{5}{24}$$

第貳部分：選填題（佔 35 分）

1. 考慮每個元（或稱元素）只能是 0 或 1 的 2×3 階矩陣，且它的第一列與第二列不相同且各列的元素不能全為零，這樣的矩陣共有 _____ 個。

【105 學測】

答：42（第二冊第二章一排列組合）

$$\text{解：} \underbrace{\left(2^3 - 1\right)^2}_{\text{每一列除 } (0,0,0) \text{ 以外各尚有 7 種可能}} - \underbrace{\left(2^3 - 1\right)}_{\text{每一列除 } (0,0,0) \text{ 以外有 7 種相同狀況}} = 49 - 7 = 42$$

每一列除 $(0,0,0)$ 以外
各尚有 7 種可能

每一列除 $(0,0,0)$ 以外
有 7 種相同狀況

2. 座標平面上 O 為原點，設 $\vec{u} = (1, 2)$ 、 $\vec{v} = (3, 4)$ 。

令 Ω 為滿足 $\overrightarrow{OP} = x\vec{u} + y\vec{v}$ 的所有點 P 所形成的區域，其中 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 、 $-3 \leq y \leq \frac{1}{2}$ ，

則 Ω 的面積為 _____ 平方單位。（化成最簡分數）

【105 學測】

答： $\frac{7}{2}$ （第三冊第三章一平面向量）

解： $\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{7}{2}\right) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{7}{2}$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ $-3 \leq y \leq \frac{1}{2}$ 兩基底向量所張拓的平行四邊形面積

3. 從橢圓 Γ 的兩焦點分別作垂直於長軸的直線，交橢圓於四點。已知連此四點得一個邊長為 2 的正方形，則 Γ 的長軸長為 _____。 【105 學測】

答： $1 + \sqrt{5}$ (第四冊第四章—橢圓)

解： $\begin{cases} 2c=2 \\ \frac{2b^2}{a}=2 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ b^2=a \\ a^2-a-1=0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (取正)，則 Γ 的長軸長為 $1 + \sqrt{5}$

4. 線性方程組 $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+3z=6 \\ x-y=6 \\ x-2y-z=8 \end{cases}$ 經高斯消去法計算後，其增廣矩陣可化簡為 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 、 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 、 $c = \underline{\hspace{2cm}}$ 、 $d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 【105 學測】

答： $(1, 4, 1, -2)$ (第四冊第三章—矩陣的列運算)

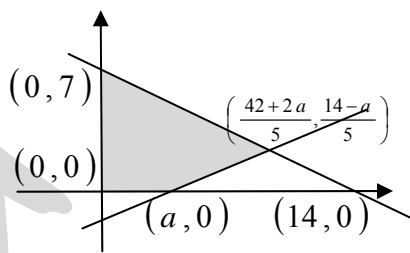
解： $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. 設 a 為一實數，已知在第一象限滿足聯立不等式 $\begin{cases} x-3y \leq a \\ x+2y \leq 14 \end{cases}$ 的所有點所形成之區域面積為 $\frac{213}{5}$ 平方單位，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 【105 學測】

答： 6 (第三冊第二章—線性不等式)

解： $\frac{14 \times 7}{2} - \frac{(14-a) \left(\frac{14-a}{5} \right)}{2} = \frac{213}{5}$
 大三角形面積 右白三角形面積
 $\Rightarrow (14-a)^2 = 64 \Rightarrow a = 6, 22$ (不合)



6. 投擲一公正骰子三次，所得的點數依序為 a 、 b 、 c 。

在 b 為奇數的條件下，行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$ 的機率為 _____。(化為最簡分數)

【105 學測】

答： $\frac{19}{36}$ (第二冊第三章—條件機率)

解： $n(A=b \text{ 為奇數}) = 6 \times 3 \times 6 = 108$

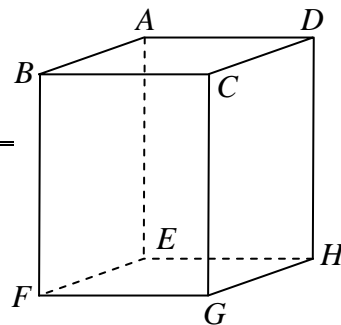
$$n(A \cap B = b \text{ 為奇數且 } b^2 < ac) = \begin{cases} (5+6+6+6+6+6) \\ + (0+2+3+4+5+5) = 57 \\ + (0+0+0+0+1+2) \end{cases}$$

所求機率 = $\frac{57}{108} = \frac{19}{36}$

7. 如右圖所示， $ABCD-EFGH$ 為一長方體。

若平面 BDG 上一點 P 滿足 $\vec{AP} = \frac{1}{3} \vec{AB} + 2 \vec{AD} + a \vec{AE}$ ，

則實數 $a =$ _____。(化為最簡分數) 【105 學測】



答： $\frac{4}{3}$ (第四冊第二章—空間中的直線與平面)

解： $C(0, 0, 0)$ 、 $D(h, 0, 0)$ 、 $B(0, k, 0)$ 、 $G(0, 0, \ell)$
 $A(h, k, 0)$ 、 $E(h, k, \ell)$

$$\vec{AP} = \frac{1}{3} \vec{AB} + 2 \vec{AD} + a \vec{AE}$$

$$\Rightarrow (x-h, y-k, z) = \frac{1}{3}(-h, 0, 0) + 2(0, -k, 0) + a(0, 0, \ell) \Rightarrow P\left(\frac{2h}{3}, -k, a\ell\right)$$

代入平面 BDG ： $\frac{x}{h} + \frac{y}{k} + \frac{z}{\ell} = 1 \Rightarrow \frac{2}{3} - 1 + a = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$

解： 考試時求快，亦可將長方體視為單位正立方體，

$C(0, 0, 0)$ 、 $D(1, 0, 0)$ 、 $B(0, 1, 0)$ 、 $G(0, 0, 1)$ 、 $A(1, 1, 0)$ 、 $E(1, 1, 1)$

$$\vec{AP} = \frac{1}{3} \vec{AB} + 2 \vec{AD} + a \vec{AE}$$

$$\Rightarrow (x-1, y-1, z) = \frac{1}{3}(-1, 0, 0) + 2(0, -1, 0) + a(0, 0, 1) \Rightarrow P\left(\frac{2}{3}, -1, a\right)$$

代入平面 BDG ： $x + y + z = 1 \Rightarrow \frac{2}{3} - 1 + a = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$