

說明：本試題皆為計算證明題，請詳寫計算過程，否則不予計分。請在答案卷上自行標明題號，且可不照順序作答。1-12 題每題 6 分，13-15 如題後配分。

【1】、從 1 開始的連續 n 個正整數中，拿掉兩個連續整數後，剩下的數的平均值為 $29\frac{7}{11}$ ，求拿掉的兩個連續整數為何？

【2】、因式分解： $(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (a+c-b)^3 - (a+b-c)^3$

【3】、解方程式： $(X^2-3X-12)^3 + 6(X^2-3X-12) = X^3 + 6X$

【4】、化簡： $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1317} - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = \frac{m}{n}$ ，其中 m 、 n 為自然數且互質，求證 m 必為 1979 的倍數。

【5】、大於 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^6$ 的最小整數為何？

【6】、設 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2006}, a_{2007}$ 均為整數，且滿足條件 $a_0 = 0, |a_1| = |a_0 + 1|, |a_2| = |a_1 + 1|, \dots, |a_{2007}| = |a_{2006} + 1|$ 。求 $|a_1 + a_2 + \dots + a_{2007}|$ 的最小值為？

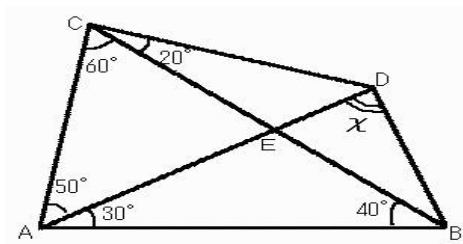
【7】、已知 a, b, c 為正整數且滿足下列聯立方程式：試求 a, b, c 的值。

$$(a-b)(b-c)(c+a) = -90$$

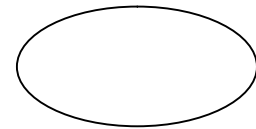
$$(a-b)(b+c)(c-a) = 42$$

$$(a+b)(b-c)(c-a) = -60$$

【8】、如下圖，求 $X = ?$ 度



【9】、給定一條橢圓曲線，如何利用尺規作圖的方法找出它們的焦點？



【10】、將「a、a、b、b、c、c、d、e」八個字全取作直線排列，其中同字不得相鄰的排列法共有幾種？

【11】、試求與橢圓 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ 相切且互相垂直的兩切線的交點軌跡方程式為何？

【12】、證明半徑為 r 之球體體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 。

【13】、給予方程式 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- (1) 若方程式有異於(0,0)之解，求 λ 值 (有二解，取 $\lambda_1 > \lambda_2$)。(2分)
-)
- (2) 將 λ_1, λ_2 代入原方程組中得 $(x, y) = (x_1, y_1)$ 及 (x_2, y_2) ，但 $y_1 = y_2 = 1$ ，求 x_1 及 x_2 。(2分)
- (3) 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$ ， $B = P^{-1}AP$ ，求 B 。(2分)
- (4) 令 $A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ，其中 $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ ， $d_1 = 0$ ，求 a_n 的一般式
($n \in \mathbb{N}$)。(2分)
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = ?$ (2分)

【14】、某班某次考試 9 位同學的物理(X)與數學(Y)成績如下表：

物理(X)	68	66	62	66	69	62	65	63	64
數學(Y)	78	74	70	76	82	73	78	78	75

- (1) 求物理與數學的相關係數 (四捨五入至小數點第 2 位) (4分)
- (2) 求數學(Y)對物理(X)的迴歸直線方程式。(4分)

【15】、平面上有一橢圓，已知其焦點為(0,0)和(4,4)，且 $y = x + \sqrt{2}$ 為此橢圓的切線。

- (1) 設此橢圓方程式為 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 1$ ，求 A 、 B 、 C 、 D 、 E 之值。(4分)
- (2) 經過適當的平移及旋轉之後得方程式為 $Mx^2 + Ny^2 = 1$ ，求數對 $(M, N) = ?$ (4分)
- (3) 過 $(1, 0)$ 作此圖形之切線，求此切線方程式? (2分)