# 國立臺南家齊女中 97 年第一次教師甄選　　數學科試題

## 一、　多重選擇題(5 分，全對才給分)

2、4　1. 坐標平面上有一等腰梯形，已知其兩邊分別落在 $x$ 軸與直線 $y=\sqrt{3}x$ 上，另兩邊落在直線 $L_1$ 與 $L_2$ 上且 $L_1$ 與 $L_2$ 的交點坐標為 $(3,\sqrt{3})$，下列敘述哪些正確？

(1) $L_1$ 與 $L_2$ 必有其中一條直線方程式為 $y=\sqrt{3}$

(2) $L_1$ 與 $L_2$ 必有其中一條直線方程式為 $y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$

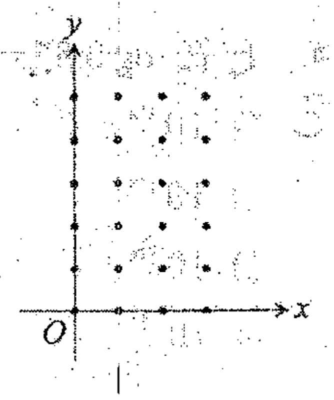
(3) $L_1$ 與 $L_2$ 必有其中一條直線方程式為 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$

(4) 此等腰梯形面積必為 $3\sqrt{3}$

(5) 此等腰梯形的面積有兩個可能值

## 二、　填充題(每格 6 分)

1. 坐標平面上，點 $P(x,y)$ 為格子點（$x,y$ 皆為整數），若 $0\le x\le 3$，$0\le y\le 5$，　如右圖所示，任意二個格子點可連成一直線，並可求其斜率，若不考慮斜率不存在的情形，可得__25__種不相等的斜率。




2. 由 5，6，7，8，9 排成一個可被 11 整除之最大五位數，此數為__97856__

3. 假設 $a,b,c$ 為相異正整數，則滿足 $a\cdot b\cdot c=2310$ 之集合 $S=\{a,b,c\}$ 有__40__個

4. 已知拋物線 $y=x^2+3x-1$ 上有相異兩點對直線 $x+y=0$ 成對稱，則此兩相異點的座標為__(1, 3) or (−3, −1)__

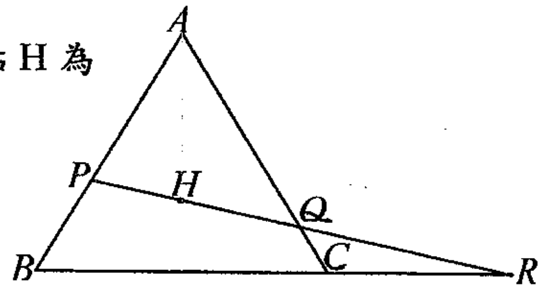
5. 已知一項過關遊戲規則為：在第 $n$ 關要擲一顆骰子 $n$ 次，所出現的點數和大於 $2^n$，才算過關。那某人連過前兩關的機率為__$\frac{5}{9}$__

6. 設函數 $f(x)$ 對於任一實數 $x$ 滿足 $f(3+2x)=f(4-2x)$，若方程式 $f(x)=0$ 有六個相異實根，則此六個相異實根之和為__21__

7. 袋中有 4 紅球，5 白球，今自袋中每次取出一球，取出不放回，取完為止。則取球過程中，紅球個數不多於白球個數之機率為__1/3__

8. 設$n\in\mathbb{N}$，$(2+\sqrt{3})^n=x_n+y_n\sqrt{3}$，其中$x_n$、$y_n\in\mathbb{N}$，則$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=$ $\sqrt{3}$

9. 已知正三角形 ABC 之邊長為$2\sqrt{3}$，如圖所示，若點 H 為正三角形 ABC 之垂心，今在$\overline{BC}$邊之延長線上取一點 R，則直線$\overline{HR}$分別與$\overline{AB}$、$\overline{AC}$邊相交於 P、Q 二點，則$\dfrac{1}{\overline{HP}}\cdot\dfrac{1}{\overline{HQ}}\cdot\dfrac{1}{\overline{HR}}=$ $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$




10 在以原點O(0 , 0 , 0)為球心，半經為 1 的單位球上取一點$A=(a_1 , a_2 , a_3)$。點 A 所對的另一點$B(a_3 , a_1 , a_2)$有在這個單位球上。則∠AOB 的最大值為 $\dfrac{2\pi}{3}$ 。

## 三、 計算證明題 (詳列計算過程，否則不予計分)

1. 設$f:N\to R$，且滿足

(1) $f(1)=\dfrac{3}{2}$

(2) $\forall\, x\in N, f(x+1)=(1+\dfrac{1}{x+1})\cdot f(x)+(1+\dfrac{x}{2})\cdot f(1)+x^2+2x$，

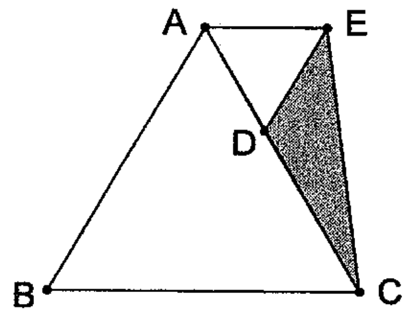
則$f(100)=$？ （8 分）

5075×5

2. 設$a,b,c$為三角形的三個邊長，$m$為一定數，若$a+\dfrac{m}{a}=b+\dfrac{m}{b}=c+\dfrac{m}{c}$，求證此三角形為等腰三角形。 （8 分）

3. 右圖中，$\Delta ABC$與$\Delta ADE$均為正三角形，若此兩正三角形的面積之和為$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，則$\Delta CDE$的面積之最大值為何？ （8 分）

$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{8}$




4. 設$0\le\theta<2\pi$，且$x=\cos2\theta-2\sin\theta$，

（1） 試證$y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{x}{4})^n$為收斂級數。(4 分)

（2） 若$y$為收斂級數，試求$y$的最大值及最小值？（7 分） $M=\dfrac{3}{5}$, $m=-\dfrac{3}{7}$