2015TRML 數學競試個人賽試題

俞克斌老師編寫

第一回

1. 若 a 爲正整數，且方程式 $\log\left(4-2x^2\right)=\log(a-x)+1$ 有實數解，則 a 的最大可能值爲________。　【2015 第十七屆 TRML 個人賽】

答：1

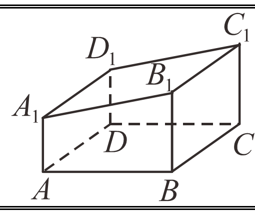
解：原式 $\Rightarrow \log\left(4-2x^2\right)=\log10(a-x)$ 有實數解 $\Rightarrow 4-2x^2=10(a-x)$ 有實數解

$\Rightarrow 2x^2-10x+(10a-4)=0$ 有實數解，則判別式 $(-10)^2-4\times2\times(10a-4)\geq0$

$\Rightarrow a\leq\frac{33}{20}$，$a$ 爲正整數。故 a 的最大可能值爲 1

且合於自然限制：眞數 $4-2x^2>0$，眞數 $a-x>0 \Rightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，$x<a$

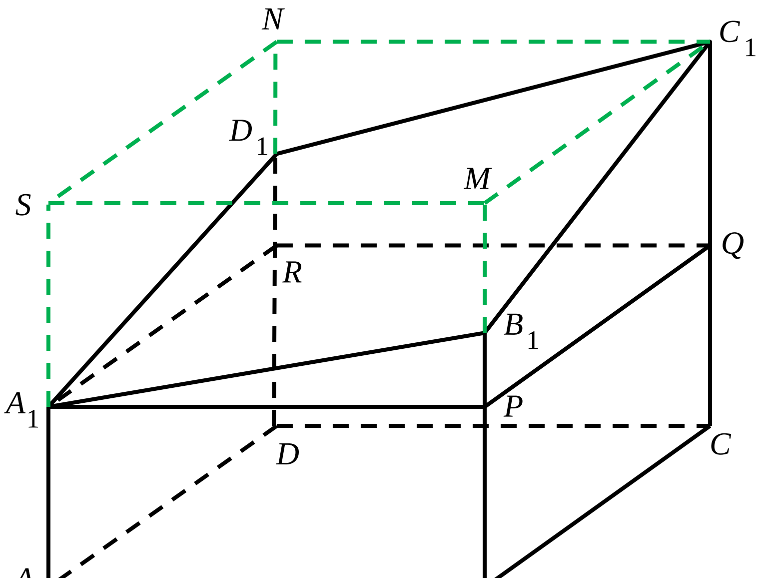
2. 如圖所示，$A_1B_1C_1D_1$ 是以矩形 $ABCD$ 爲底面的長方體之斜截面。若 $\overline{AB}=4$、$\overline{BC}=3$、$\overline{AA_1}=5$、$\overline{BB_1}=8$、$\overline{CC_1}=12$，則此立體的體積爲________。　【2015 第十七屆 TRML 個人賽】



答：102

解：$\underbrace{4\times3\times5}_{\text{長方體 } ABCD,A_1PQR \text{ 的體積}}+\underbrace{\frac{1}{2}\times(4\times3\times7)}_{\text{過對頂角線 } A_1C_1 \text{ 的截面，恰將長方體 } A_1PQR,SMC_1N \text{ 的體積「二等分」}}2$

$=60+42=10$



3. 設 x、y 爲實數，若 $x^2+2y^2=1$，則 $2x+5y^2$ 的最小值爲________。　【2015 第十七屆 TRML 個人賽】

答：-2

解：$x^2+2y^2=1 \quad\Rightarrow y^2=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)\geq0 \quad\Rightarrow x^2-1\leq0 \quad\Rightarrow -1\leq x\leq1$

$2x+5y^2=2x+5\times\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)=-\frac{5}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}\left(x^2-\frac{4}{5}x\right)+\frac{5}{2}$

$=-\frac{5}{2}\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{29}{10}$

因爲 $-1\leq x\leq1$，故當 $x=\frac{2}{5}$ 時，有最大值 $\frac{29}{10}$，當 $x=-1$ 時，有最小值 -2