國立羅東高級中學 104 學年度第 1 次教師甄選數學科部分試題

1. 圓 O 內接 $\triangle ABC$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, 圓 O 半徑為 R, O 在 $\overline{AD}$ 上
   (1) 求 $\overline{AD} + \overline{BC}$ 之最大值.
   (2) 當 $\overline{AD} + \overline{BC}$ 達到最大值時, $\angle BAC$ 為多少?

2. 令 n 為正整數, 解方程式 $(x+1)^n = x^n$ (求出所有的複數解).

3. 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & \dfrac{-a}{1+a^2} \\ \dfrac{a}{1+a^2} & \dfrac{1}{1+a^2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_n \\ x_n \end{bmatrix}$, 且 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,
   $P_2 = AP_1, P_3 = AP_2$, 求出 a 的值, 使得 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面積最大.

4. 令 a, n 為自然數, $0 < a < 10^n$, 其中 $n \geq 3$, 滿足 $(10^n + a)|(10^{n+1} + a)$, 求出 a 的值.

5. 計算 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)(n+2)\ldots(n+n)]^{\frac{1}{n}}}{n}$

6. 令 $y = x^2, y = x$ 所圍區域為 R, 試求出 R 繞 $x = y$ 一圈所得立體之體積.

7. $\Gamma : y = \frac{1}{4}x^2$, $P(a,b) \in \Gamma$, $a > 2$, 以 P 為圓心作圓切 $L : y = -1$ 於 M 點, 此圓交 y 軸於 H, L 兩點 (L 較靠近原點), $T(a)$ 為 $\triangle HLP$ 之面積, $S(a)$ 為扇形 LPM 之面積, 試求出 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{T(a)}{S(a)}$

8. $X \sim B(n,p)$, 證明 $\displaystyle\max_{k\in\{0,1,\ldots,n\}} P(X=k) = P(X = \lfloor (n+1)p \rfloor)$

9. 一箱中, 有四個分別標有 $1, 2, 3, 4$ 的球, 每次從箱中取一球紀錄號碼後放回, 連取 n 次, X_n 為這 n 次中出現不同號碼的個數
   (1) 試用 $P(X_{n-1} = k)$ 與 $P(X_{n-1} = k-1)$ 來表示 $P(X_n = k)$.
   (2) 求出 $E(X_5)$.
   (3) 求出 $E(X_n)$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX