

**國立臺中文華高級中學 104 學年度第二次教師甄選
數學科專業知能試題本**

測驗說明：

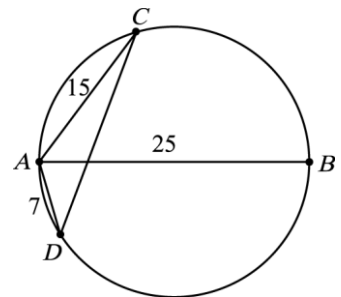
1. 本試題共三頁，分填充題(80分)及計算證明題(20分)；填充題分二部分，第一部分每格4分，第二部分每格6分，皆不需計算過程；計算證明題，需詳列計算過程或說明理由。
2. 另附五張 A4 計算紙，可供計算或打草稿，請勿用答案卷正反面打草稿。計算紙上方請書寫准考證號碼，並於考試完畢隨試題收回。
3. 填充題作答說明：請將正確的答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，不需計算過程。
4. 計算證明題作答說明：請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由，否則不予計分；若空間不夠可於答案卷背面，清楚標列題號繼續作答。

一、填充題：

第一部份：(每格4分)

1. 老師準備了 7 根香蕉和 5 塊太陽餅要分給小綠、小黃、小紅、小白四位同學。如果每人都拿到 3 個，在分配時，還沒拿滿 3 個的人得到物品的機會均等，則小綠至少拿到 1 根香蕉和 1 塊太陽餅的機率為_____。

2. 如右圖，以 \overline{AB} 為直徑畫圓，圓周上取兩點 C 、 D 在 \overline{AB} 異側，已知 $\overline{AB} = 25$ ， $\overline{AC} = 15$ ， $\overline{AD} = 7$ ，則 $\overline{CD} =$ _____。



3. 滿足不等式 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq k$ ， $|x-1| + |y-1| \geq 3$ 的動點 $P(x, y)$ ，若 $x+y$ 的最大值為 5，則 k 值為_____。

4. 設平面 E 為一光滑鏡面，有一光束沿此直線 $L: x-1 = \frac{y-1}{2} = z$ 方式射向 E 後，再依直線

$M: x-1 = y-1 = \frac{z}{-2}$ 反射；若此平面 E 有一法向量為 $(2, b, c)$ ，則數對 $(b, c) =$ _____。

5. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ， $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $A^2 + AX = I$ ，則 $a+b =$ _____。

6. 有一正數 N ，若 N 的小數部分、整數部分，及此正數 N 成等比數列，則 $N =$ _____。
7. $\triangle ABC$ 中， $A(1,7)$ ，其中兩中線所在直線方程式為 $x+y=5$ ， $x-2y=-7$ ，則 \overline{BC} 所在直線方程式為_____。
8. 若直線 L 將 $\Gamma: \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} \leq 1$ 之區域面積等分為二，且 L 不通過第一象限，則直線 L 之斜率 m 範圍為_____。

第二部份：(每格6分)

9. 已知 $f(3^x) = (4\log_2 3)x + 66$ ，則 $f(2) + f(4) + f(8) + \dots + f(2^{19})$ 的值為_____。
10. 設 $k > 0$ ，若兩曲線 $y = x^3 - 2x^2$ 與 $y = 4x^2 - k$ 交於 P 點，且在 P 點有公切線，則此兩曲線所圍成的封閉區域面積為_____。
11. 設甲箱內有2白球，乙箱內有4紅球，現在每次同時自各箱中隨機取出一個球交換，則在長期的交換後，2白球在甲箱內的機率為_____。
12. 若 $\frac{4}{5} \leq x \leq 3$ ，則 $\sqrt{5x-4} + \sqrt{3-x}$ 之最大值為_____。
13. 多項式 x^{1988} 除以 $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ 的餘式為_____。
14. 令 $(|x| + |y| - 1)(|x| + |y| - \frac{1}{2})(|x| + |y| - \frac{1}{4}) \dots (|x| + |y| - \frac{1}{2^{n-1}}) \leq 0$ 所圍面積為 a_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____。
15. 正 $\triangle ABC$ 邊長 $2\sqrt{3}$ ，重心 G ，在 \overline{BC} 的延長線上取一點 F ，作直線 GF ，分別交 \overline{AB} 、 \overline{AC} 於點 D, E ，且 $\angle GFC = 20^\circ$ ，則 $\frac{1}{GD} \cdot \frac{1}{GE} \cdot \frac{1}{GF} =$ _____。
16. 設方程式 $x^4 - x^2 + 1 = 0$ 的四根在複數平面上所對應的點分別為 A, B, C, D ，令點 $P(i)$ ，則 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PD} =$ _____。