104 年大學入學指定科目考試試題
數學甲

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（佔 76 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 滿足不等式$\dfrac{1}{104} \le \left(\sqrt{10}\right)^{x} \le 2015$的整數$x$共有多少個？

(1) 9 個　(2) 10 個　(3) 11 個　(4) 12 個　(5) 13 個　【104 數甲】

答：(3)

解：$\dfrac{1}{104^{2}} \le 10^{x} \le 2015^{2} \quad \Rightarrow \log\dfrac{1}{104^{2}} \le x \le \log 2015^{2} \Rightarrow -2\left(2.0170\right) \le x \le \left(3.3043\right)$

$\Rightarrow -4.0340 \le x \le 6.6086$，$x \in Z \Rightarrow x = -4,-3,\cdots,5,6$ 共 11 個

2. 考慮坐標平面上的直線$L:3x-2y=1$。若a為實數且二階方陣$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -8 \end{bmatrix}$所代表的線性變換可以將$L$上的點變換到一條斜率為$2$的直線。則$a$的值為下列哪一個選項？

(1) 6　(2) 8　(3) 10　(4) 12　(5) 14　【104 數甲】

答：(5)

解：$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，又$\begin{cases} L:3x-2y=1 \\ L':2x'-y'=k \end{cases}$

$\begin{cases} x'=x \\ y'=ax-8y \end{cases}$　代入$L' \Rightarrow 2\left(x\right)-\left(ax-8y\right)=k$

$\Rightarrow \left(2-a\right)x+8y=k$　等同L　$\Rightarrow 2-a=-12 \quad \Rightarrow a=14$

3. 設複數平面上的相異四點z_1, z_2, z_3, z_4依序且依逆時針方向可連成一個正方形。下列哪一個選項為$\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$之值？

(1) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\,i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$　(2) $\sqrt{2}\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\,i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$　(4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(5) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$　【104 數甲】

答：(4)

解：$\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \dfrac{\left(0+i\right)-\left(0+0i\right)}{\left(-1+i\right)-\left(0+0i\right)} = \dfrac{i}{-1+i} = \dfrac{i\left(-1-i\right)}{2} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right] = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

二、多選題（佔 40 分）

4. 坐標平面上有 A、B、C 三點，滿足 $\angle ABC$ 爲直角，$\overline{AB}=\overline{BC}$，且向量 $\overrightarrow{AB}=(4,2)$。
請選出可以爲向量 $\overrightarrow{AC}$ 的選項。
(1) $(-2,4)$ (2) $(2,-4)$ (3) $(2,6)$ (4) $(-2,6)$ (5) $(6,-2)$ 【104 數甲】

答：(3)(5)

解：$\overrightarrow{BA}=(-4,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(2,-4)$ 或 $(-2,4)$。$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=(6,-2)$ 或 $(2,6)$

5. 設實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1+i)=5$ 與 $f(i)=10$ (其中 $i=\sqrt{-1}$)，
且 $f(x)$ 除以 $(x^2-2x+2)(x^2+1)$ 的餘式爲 $g(x)$。請選出正確的選項。
(1) $g(1+i)=5$
(2) $f(-i)=-10$
(3) $g(x)$ 除以 x^2-2x+2 的餘式是一次多項式
(4) $g(x)$ 除以 x^2-2x+2 的商式是 $2x+1$
(5) $g(x)=2x^3-7x^2+2x+3$ 【104 數甲】

答：(1)(4)

解：$f(x)=(x^2-2x+2)(x^2+1)Q(x)+g(x)$
(1) $f(1+i)=g(1+i)=5$
(2) $f(i)=g(i)=10+0i$，故 $f(-i)=g(-i)=10-0i$
$g(x)=(x^2-2x+2)(ax+b)+px+q$
(3) $g(1+i)=p(1+i)+q=5 \quad \Rightarrow p=0$，$q=5$
(4) $g(i)=(1-2i)(ai+b)+5=10 \quad \Rightarrow a=2$，$b=1$
(5)故 $g(x)=(x^2-2x+2)(2x+1)+5=2x^3-3x^2+2x+7$

6. 設 $f(x)$ 爲實係數二項多項式，$g(x)$ 爲實係數三項多項式。已知 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4$ 與 $x=0$，而 $y=g(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4$，$x=0$ 及 $x=4$，且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的(相對)極小值皆發生於 $-4<x<0$。請選出正確的選項。
(1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高次項係數皆爲正
(2) $f(x)$ 的(相對)極小值發生於 $x=-2$
(3) $g(x)$ 的(相對)極小值發生於 $x=-2$
(4) $g(-1)=g(-3)$
(5) $g(-1)=-g(1)$ 【104 數甲】

答：(2)(5)

解：(1) $f(x)=a(x+4)x$，$g(x)=b(x+4)(x)(x-4)$
且 $a>0$，$b<0$ ($\because$ 極小值發生在 $-4<x<0$)
(2) $f(x)=a(x^2+4x)=a\left[(x+2)^2-4\right]$，$x=-2$ 時，有 Min

(3) $g(x)=b\left(x^3-4x\right) \Rightarrow g'(x)=b\left(3x^2-4\right)$

$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 時，有 Max $\quad x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 時，有 Min

(4) $g(-1)=15b \neq g(-3)=21b$ $\qquad$ (5) $g(-1)=15b=-g(1)=-(-15b)$

7. 座標平面上有一以原點 O 爲圓心的圓 C，交直線 $x-y+1=0$ 於 Q 、 R 兩點。 已知圓 C 上有一點 P 使得 ΔPQR 爲一正三角形。請選出正確的選項。 (1) O 點與 P 點皆在 $\overline{QR}$ 的中垂線上 (2) P 點在第三象限 (3) $\overline{QR}$ 的中點座標爲 $\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ (4) 圓 C 的方程式爲 $x^2+y^2=2$ (5) 直線 $x-y-1=0$ 爲圓 C 在 P 點的切線 【104 數甲】

答：(1)(4)

解：(1) O 點與 P 點皆在 $\overline{QR}$ 的中垂線 $x+y=0$ 上

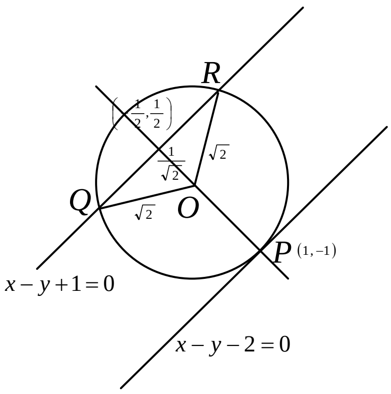
(2) P 點 $(1,-1)$ 應在第四象限

(3) $\overline{QR}$ 的中點座標應爲 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

(4) 因爲 $d\left(O,x-y+1=0\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，且 $\angle OQR=\dfrac{\pi}{6}$

故圓 C 的半徑 $\sqrt{2}$

(5) 過 P 點的切線應爲 $x-y-2=0$



8. 被診斷爲不孕症的患者，可分爲兩類： 第一類爲可藉人工方式受孕；其餘患者爲第二類，無法藉由人工方式受孕。 第一類在不孕症的患者中所佔比例爲 p （$0<p<1$）， 而每做一次人工受孕成功的機率爲 q （$0<q<1$），且每次成功與否互相獨立。 不孕症的患者除非人工受孕成功，否則無法得知是屬於哪一類的患者。 請選出正確的選項。 (1) 不孕症的患者，第一次人工受孕失敗的機率爲 $(1-p)(1-q)$ (2) 在人工受孕失敗一次的情況下，屬於第二類不孕症患者的條件機率爲 $\frac{1-p}{1-pq}$ (3) 若醫學進步，讓人工受孕成功的機率 q 提高了，則在人工受孕失敗一次的情況下，屬於第二類不孕症患者的條件機率會降低 (4) 在第一類的患者中，做一次人工受孕就成功的機率大於做兩次才成功的機率 (5) 若醫學進步，讓人工受孕成功的機率 q 提高了，則在第一類的患者中，做一次人工受孕就成功的機率會增加，而做兩次才成功的機率會降低 【104 數甲】

答：(2)(4)

解：(1) 全 − 第一類且受孕成功 $=1-pq$ $\qquad$ (1) $\underbrace{p}_{\text{第一類}}\times\underbrace{(1-q)}_{\text{受孕失敗}}+\underbrace{(1-p)}_{\text{第二類}}\times\underbrace{1}_{\text{受孕失敗}}=1-pq$

(2) $\dfrac{\underbrace{(1-p)}_{\text{第二類}}\times\underbrace{1}_{\text{受孕失敗}}}{1-pq}$　(3)承(2)，當分母變小，分數應變大

(4) $\underbrace{p}_{\text{第一類}}\times\underbrace{q}_{\text{受孕成功}}-\underbrace{p}_{\text{第一類}}\times\underbrace{(1-q)\times q}_{\substack{\text{第一次受孕失敗}\\\text{第二次受孕成功}}}=pq^2>0$

(5) $\underbrace{p}_{\text{第一類}}\times\underbrace{Q}_{\text{受孕成功}}-\underbrace{p}_{\text{第一類}}\times\underbrace{q}_{\text{受孕成功}}=p(Q-q)>0$，確實變大

$\underbrace{p}_{\text{第一類}}\times\underbrace{(1-Q)\times Q}_{\substack{\text{第一次受孕失敗}\\\text{第二次受孕成功}}}-\underbrace{p}_{\text{第一類}}\times\underbrace{(1-q)\times q}_{\substack{\text{第一次受孕失敗}\\\text{第二次受孕成功}}}=p(Q-q)[1-Q-q]$，不一定$>0$

三、選填題（佔 18 分）

1. 設a、b為實數，$f(x)$為 5 次實係數多項式且其最高次項係數為a。
若$f(x)$滿足$\int_b^x f(t)dt=\dfrac{3}{2}\left(x^2+4x+5\right)^3-\dfrac{3}{2}$，則$a=$________，$b=$________。
【104 數甲】

$\boxed{答}$：$a=9$；$b=-2$

$\boxed{解}$：$\left[\int_b^x f(t)dt\right]'=\left[\dfrac{3}{2}\left(x^2+4x+5\right)^3-\dfrac{3}{2}\right]'$

$\Rightarrow\ f(x)=\dfrac{3}{2}\times 3\left(x^2+4x+5\right)^2(2x+4)=9\left(x^2+4x+5\right)^2(x+2)$

$\int_b^x 9\left(t^2+4t+5\right)^2(t+2)dt=\left[\dfrac{3}{2}\left(t^2+4t+5\right)^3\right]_b^x$

$=\dfrac{3}{2}\left(x^2+4x+5\right)^3-\dfrac{3}{2}\left(b^2+4b+5\right)^3$

故$\left(b^2+4b+5\right)^3=1\ \Rightarrow\ b^2+4b+5=1\ \Rightarrow\ (b+2)^2=0\ \Rightarrow\ b=-2$

2. 座標空間中，設P、Q為平面$3x-2y-2z=1$上兩點且滿足$\overline{PQ}=7$。
另取空間中兩點P'、Q'滿足向量$\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{QQ'}=(-3,4,6)$。
當向量$\overrightarrow{PQ}=\pm$________時，會使得平行四邊形$PQQ'P'$面積最大。　【104 數甲】

$\boxed{答}$：$\overrightarrow{PQ}=\pm(2,6,-3)$

$\boxed{解}$：當$\overrightarrow{PQ}=\pm t(3,-2,-2)\times(-3,4,6)=\pm t(-4,-12,6)$時，$PQQ'P'$恰為長方形
又$\overline{PQ}=7$，而$|(-4,-12,6)|=14$，故取$t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=\pm(2,6,-3)$

3. 一盒子裡有 n（$n>3$）顆大小相同的球，其中有 1 顆紅球、2 顆藍球以及 $n-3$ 顆白球。從盒子裡隨機同時抽取 3 球，所得球的計分方式爲每顆紅球、藍球及白球分別爲 $2n$ 分、n 分及 1 分。若所得分數的期望值爲 E_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n=$________。【104 數甲】

答：15

解：

事件	3 白	2 白 1 紅	2 白 1 藍	2 藍 1 紅	2 藍 1 白	1 白 1 紅 1 藍
機率	$\dfrac{C_3^{n-3}}{C_3^n}$	$\dfrac{C_2^{n-3}C_1^1}{C_3^n}$	$\dfrac{C_2^{n-3}C_1^2}{C_3^n}$	$\dfrac{C_2^2C_1^1}{C_3^n}$	$\dfrac{C_2^2C_1^{n-3}}{C_3^n}$	$\dfrac{C_1^{n-3}C_1^1C_1^2}{C_3^n}$
得分	3	$2n+2$	$n+2$	$4n$	$2n+1$	$3n+1$

$$E_n=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\begin{bmatrix}\dfrac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2}+\\(n-3)(n-4)(n+1)+\\(n-3)(n-4)(n+2)+\\4n+\\(n-3)(2n+1)+\\2(n-3)(3n+1)\end{bmatrix}，\lim_{n\to\infty}E_n=6\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}+\\1+\\1+\\0+\\0+\\0\end{bmatrix}=15$$

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

1. 有一時鐘的時針長度爲 5 公分，分針長度爲 8 公分。
假設時針針尖每分鐘所移動的弧長都相等。
(1) 試求時針針尖每分鐘所移動的弧長。
(2) 已知時針針尖與分針針尖距離爲 7 公分，求時針和分針所夾的角度。
(3) 試問在六點與六點半之間，時針針尖與分針針尖的距離最接近 7 公分是在六點幾分？（取至最接近的整數分鐘）【104 數甲】

答：(1) $\dfrac{\pi}{72}$ 公分　(2) $\dfrac{\pi}{3}$(弳)　(3) 22 分鐘

解：時針每分鐘走 $\dfrac{2\pi}{12\times 60}=\dfrac{\pi}{360}$(弳)，分針每分鐘走 $\dfrac{2\pi}{60}=\dfrac{\pi}{30}$(弳)

(1) 時針針尖每分鐘所移動的弧長 $5\times\dfrac{\pi}{360}=\dfrac{\pi}{72}$ 公分

(2) $\cos\theta=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\times 5\times 8}=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}$(弳)

(3) $\left(\pi+\dfrac{\pi}{360}\times x\right)-\left(\dfrac{\pi}{30}\times x\right)=\dfrac{\pi}{3}\ \Rightarrow x=\dfrac{240}{11}=21.\overline{81}\approx 22$ 分鐘

2. 設無窮數列$\left\langle a_n \right\rangle$符合$a_0=0$且當$n\ge 1$時，$a_n$滿足

$$a_n-a_{n-1}=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n, & 當 n 爲偶數\\ \left(\dfrac{1}{5}\right)^n-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n, & 當 n 爲奇數\end{cases}$$

(1) 將a_6寫成兩個等比級數的差，其中一個有 6 項，另一個有 3 項。

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$的直。

(3) 證明：當$n\ge 0$時$a_{2n+2}-a_{2n}<0$。並依此說明對於所有正整數n，

不等式$-\dfrac{1}{8}\le a_{2n}<0$恆成立。【104 數甲】

答：(1) $a_6=\left(\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+\left(\dfrac{1}{5}\right)^3+\left(\dfrac{1}{5}\right)^4+\left(\dfrac{1}{5}\right)^5+\left(\dfrac{1}{5}\right)^6-\left(\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\right)^3-\left(\dfrac{1}{3}\right)^5$

(2)(3)

解：(1)
$$\begin{cases}a_1-a_0=\left(\dfrac{1}{5}\right)^1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\\ a_2-a_1=\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\\ a_3-a_2=\left(\dfrac{1}{5}\right)^3-\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\\ a_4-a_3=\left(\dfrac{1}{5}\right)^4\\ a_5-a_4=\left(\dfrac{1}{5}\right)^5-\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\\ a_6-a_5=\left(\dfrac{1}{5}\right)^6\end{cases}\Rightarrow a_6=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{5}\right)^1+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+\left(\dfrac{1}{5}\right)^3\\ +\left(\dfrac{1}{5}\right)^4+\left(\dfrac{1}{5}\right)^5+\left(\dfrac{1}{5}\right)^6\\ -\left(\dfrac{1}{3}\right)^1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^3-\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\end{cases}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=\dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}-\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{8}=-\dfrac{1}{8}$

(3) $a_{2n+2}-a_{2n}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2n+1}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2n+2}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n+1}$

$$=\frac{5\times 3^{n+2}+3^{n+2}-3\times 5^{n+2}}{15^{2n+2}}=\frac{\left[2\times 3^{n+2}-5^{n+2}\right]\times 3}{15^{2n+2}}<0$$

故知$\left\langle a_{2n}\right\rangle$爲遞減數列，故$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}\le a_{2n}<a_0$，亦即$-\dfrac{1}{8}\le a_{2n}<0$