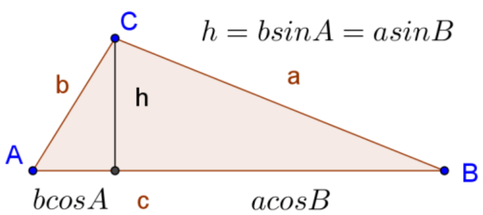
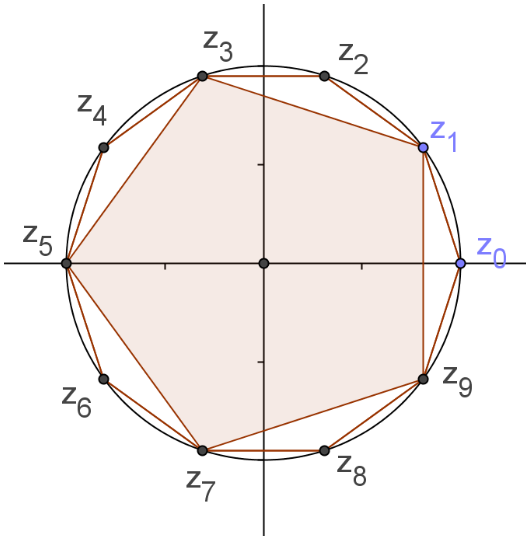
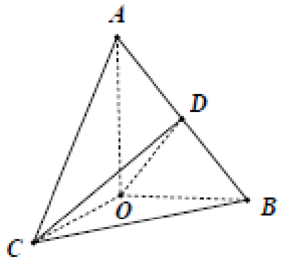
1	已知等比數列$\{a_n\}$ 的每一項均為實數，前 n 項和為S_n，若$S_{10}=10, S_{30}=70$，求$S_{40}=$？ 【解答】150 【詳解】若$\{a_n\}$的公比為 r，則$S_{10},(S_{20}-S_{10}),(S_{30}-S_{20})$是公比為$r^{10}=t$的等比數列，因此可知$S_{10}=10,(S_{20}-S_{10})=10t,(S_{30}-S_{20})=10t^2$，$S_{30}=70=10(1+t+t^2)$，可解得$t=r^{10}=2,-3$，因數列$\{a_n\}$為實數，因此$t=r^{10}=2$。 所以$S_{40}=10(1+t+t^2+t^3)=150$	104 陽 明 高 中				A 0 1 7 0
1	設ΔABC的內角 A、B、C 所對應的邊長分別為 a,b,c 且知$a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$，則 $\tan A\cot B=$？ 【解答】4 【詳解】 利用$\begin{cases} a\cos B+b\cos A=c \\ a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c \end{cases}$可解出$\cos B=\frac{4c}{5a},\cos A=\frac{c}{5b}$，加上$b\sin A=a\sin B$，代入 $\tan A\cot B=\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\frac{\frac{a}{b}\sin B\cdot\frac{4c}{5a}}{\frac{c}{5b}\cdot\sin B}=4$。	104 陽 明 高 中				A 0 1 7 1

1	設 $\omega=\cos\frac{2\pi}{10}+i\sin\frac{2\pi}{10}$ ，則以 $\omega,\omega^3,\omega^7,\omega^9$ 為根的方程式為 ？ 【解答】 $x^4-x^3+x^2-x+1=0$ 【詳解】 如圖，可知 $x^5=-1$ 中，除了 $x=-1$ 以外的四個根就是 $\omega,\omega^3,\omega^7,\omega^9$ 。 $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ ，故所求為 $x^4-x^3+x^2-x+1=0$ 。	104 陽明高中			A0172

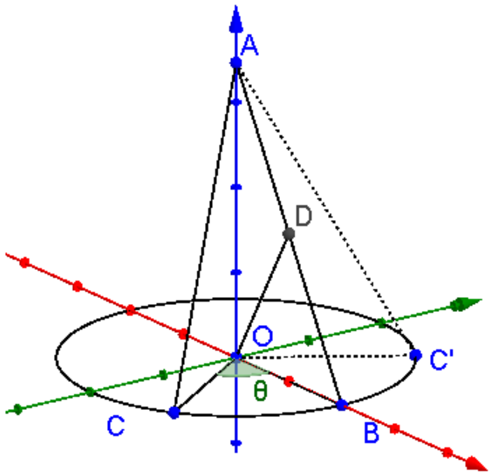
1

如右圖，已知ΔAOB中，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{2},\angle BAO=\dfrac{\pi}{6}$，$\overline{AB}=4$，D 是線段$\overline{AB}$ 的中點，若ΔAOC 是ΔAOB繞直線$\overleftrightarrow{AO}$ 旋轉而成的，若平面 AOB 與 COD 所夾的二面角為$\dfrac{\pi}{3}$，平面 AOB 與 AOC 所夾的二面角為θ，則$\sin\theta=$ ？



【解答】$\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

【詳解】訂空間座標系，依題意設$O(0,0,0),A(0,0,2\sqrt{3}),B(2,0,0)$，可知$D(1,0,\sqrt{3})$。



由於旋轉的關係，可知 C 點在平面$z=0$ 上，

且$\overline{OC}=2$，可設$C(2\cos\theta,2\sin\theta,0)$。

平面 AOB 為$y=0$，法向量$\overline{n_{AOB}}=(0,1,0)$，平面 COD 的法向量可由外積得到

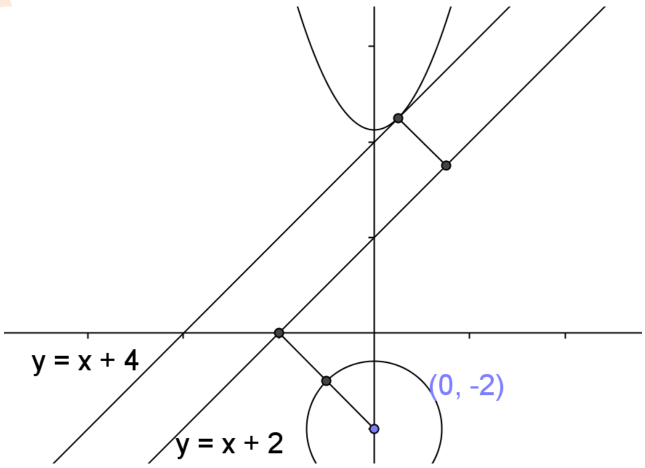
$\overline{n_{COD}}=\overline{OC}\times\overline{OD}=(-2\sqrt{3}\sin\theta,2\sqrt{3}\cos\theta,2\sin\theta)$，計算

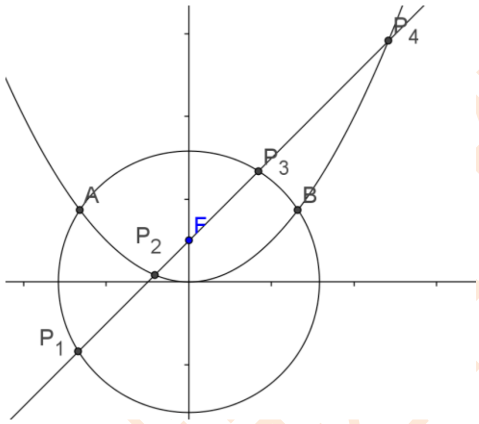
$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{n_{AOB}}\cdot\overline{n_{COD}}}{\left|\overline{n_{AOB}}\right|\left|\overline{n_{COD}}\right|}=\frac{2\sqrt{3}\cos^2\theta}{1\cdot\sqrt{12\sin^2\theta+12\cos^2\theta+4\sin^2\theta}}$$，可得

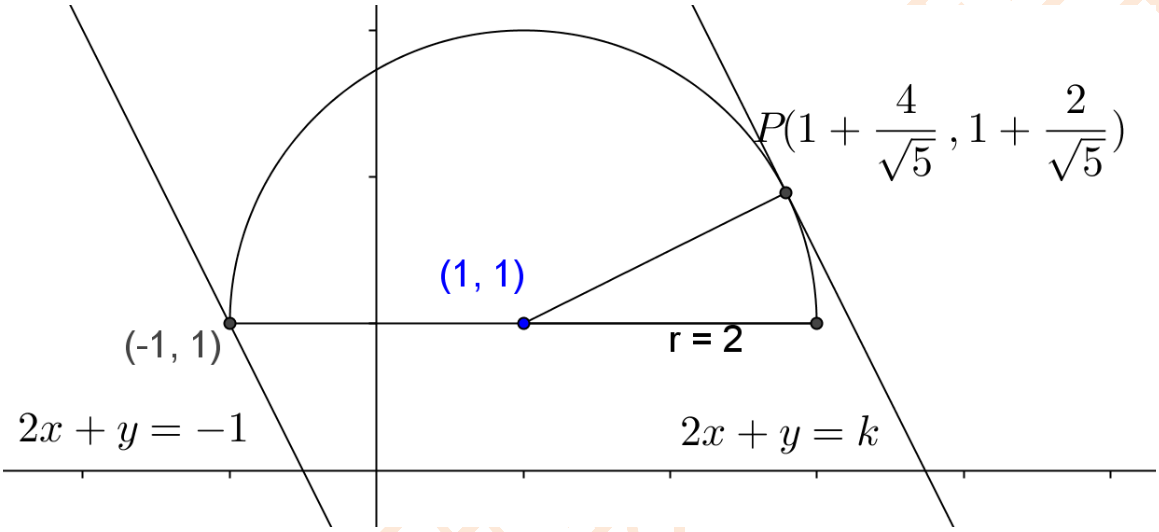
$3+\sin^2\theta=12\cos^2\theta=12(1-\sin^2\theta)\Rightarrow 13\sin^2\theta=9$，因此$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$。

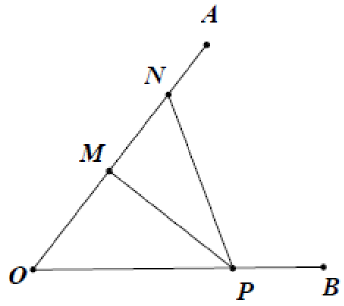
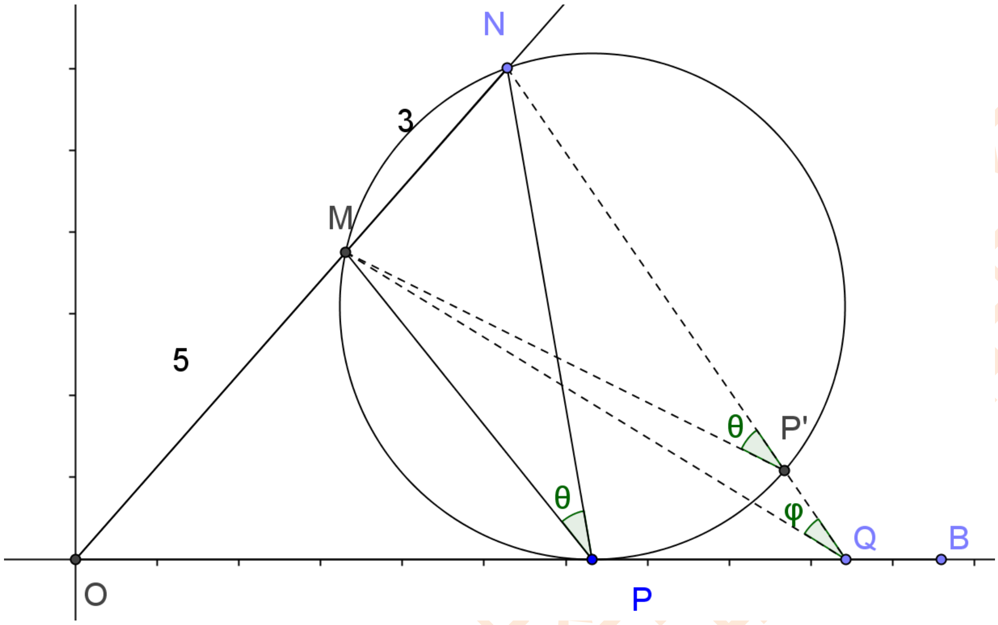
104 陽明高中

A0173

1	已知銳角ΔABC 的外心為 O，$\overline{AB}=6,\overline{AC}=10$，若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且$2x+10y=5$，求$\cos(\angle BAC)=$？ 【解答】$\dfrac{1}{3}$ 【詳解】利用$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=18$，可得$18=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=36x+60y\cos\theta$， 同理$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=50=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=100y+60x\cos\theta$。 解聯立$\begin{cases}18=36x+60y\cos\theta\\50=100y+60x\cos\theta\\2x+10y=5\end{cases}$，前兩式先消去$\cos\theta$，可得$\begin{cases}50y-18x=100y^2-36x^2\\2x+10y=5\end{cases}$， 進而解出$x=\dfrac{1}{4},y=\dfrac{9}{20}$，代回可解出$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$。	104 陽 明 高 中			A 0 1 7 4
1	已知曲線$\Gamma:y=x^2+a$ 到直線$L:y=x+2$ 的距離等於圓$C:x^2+(y+2)^2=2$ 到直線$L:y=x+2$的距離，則實數$a=$？ 【解答】$\dfrac{17}{4}$ 【詳解】圓$C:x^2+(y+2)^2=2$ 到直線$L:y=x+2$的距離為圓心$(0,-2)$到 L 距離再減去半徑，為$\dfrac{\|4\|}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$。 Γ到 L 距離為$\sqrt{2}$，可設L'與 L 距離為$\sqrt{2}$，此時$L':y=(x+2)\pm 2$，則Γ與L' 距離為 0，為相切的情況。由於$\Gamma:y=x^2+a$開口朝上，圓$C:x^2+(y+2)^2=2$在L下方， 因此僅需考慮$L':y=x+4$ 即可。  解$\Gamma:y=x^2+a$與$L':y=x+4$相切，也就是$x^2+a-(x+4)=0$ 判別式為 0， $D=1-4(a-4)=0$，$a=\dfrac{17}{4}$。	104 陽 明 高 中			A 0 1 7 5

1	已知圓 $x^2+y^2=10$ 與拋物線 $x^2=4y$ 交於 A、B 兩點，F 為拋物線的焦點，若過 F 且斜率為 1 的直線 L 與拋物線和圓交於四個不同的點，由左至右依次為 P_1,P_2,P_3,P_4，求 $\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}=$ ？ 【解答】$5\sqrt{2}$ 【詳解】易知 $F(1,0)$，過 F 的直線 $L:y=x+1$。  L 與圓交點為 P_1,P_3，解 $\begin{cases}x^2+y^2=10\\y=x+1\end{cases}$ 可得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}}{2}$ L 與拋物線交點為 P_2,P_4，解 $\begin{cases}x^2=4y\\y=x+1\end{cases}$ 可得 $x=2\pm2\sqrt{2}$ 因此 P_1,P_2,P_3,P_4 的 x 坐標 x_1,x_2,x_3,x_4 分別為 $\dfrac{-1-\sqrt{19}}{2},2-2\sqrt{2},\dfrac{-1+\sqrt{19}}{2},2+2\sqrt{2}$ $\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}=\sqrt{2}\left[(x_2-x_1)+(x_4-x_3)\right]=\sqrt{2}\left[(x_2+x_4)-(x_1+x_3)\right]=5\sqrt{2}$	104 陽 明 高 中				A 0 1 7 6

1	已知實數 $a>0, a\neq 1$ ，正實數 x,y 滿足 $(\log_a x)^2+(\log_a y)^2-\log_a (xy)^2\leq 2$ 且 $\log_a y\geq 1$，令 $k=\log_a x^2 y$ ，則 k 的範圍為？ 【解答】$\left[-1, 2\sqrt{5}+3\right]$ 【詳解】令 $X=\log_a x$ ，$Y=\log_a y\geq 1$，所求 $k=\log_a x^2y=2\log_a x+\log_a y=2X+Y$ 。 $(\log_a x)^2+(\log_a y)^2-\log_a (xy)^2=(\log_a x)^2+(\log_a y)^2-2\left[\log_a x+\log_a y\right]\leq 2$ ，配方法可得 $(\log_a x-1)^2+(\log_a y-1)^2\leq 4 \Rightarrow (X-1)^2+(Y-1)^2\leq 4$ 。 因此此題為在 $(X-1)^2+(Y-1)^2\leq 4$ ，且 $Y\geq 1$ 的區域內找 $2X+Y$ 的最大最小值，此區域為一上半圓，顯然最小值發生在 $(-1,1)$ ，此時 $2X+Y=-1$ 。  最大值發生在上半圓與 $2X+Y=k$ 的切點 $P(1+\frac{4}{\sqrt{5}},1+\frac{2}{\sqrt{5}})$ 上，此時 $k=3+2\sqrt{5}$ 。 因此 k 的範圍為閉區間 $\left[-1, 2\sqrt{5}+3\right]$ 。	104 陽 明 高 中			A 0 1 7 7
1	有 4 對夫婦圍坐一圓桌，『恰有兩對』夫婦相鄰的坐法有幾種？ 【解答】1152 【詳解】先選出恰好相鄰的兩對，有 C_2^4 種。 設相鄰的為 A, B 這兩對，將 $(Aa),(Bb),C,c,D,d$ 六個環排，有 $\frac{6!}{6}\times 2^2$ 種。 利用排容原理，扣掉 (Cc) 相鄰 $\frac{5!}{5}\times 2^3$ 種和 (Dd) 相鄰 $\frac{5!}{5}\times 2^3$ 種，再加上 $(Cc)\cap(Dd)$ $\frac{4!}{4}\times 2^4$ ，因此一共有 $C_2^4\left[\frac{6!}{6}\times 2^2-2\times\frac{5!}{5}\times 2^3+\frac{4!}{4}\times 2^4\right]=1152$ 種。	104 陽 明 高 中			A 0 1 7 8

1	如右圖，M、N 是銳角 $\angle AOB$ 的一邊 $\overline{OA}$ 上的兩點，且 $\overline{OM}=5, \overline{MN}=3$，若點 P 是在 $\overline{OB}$ 邊上使得 $\angle MPN$ 最大，求 $\overline{OP}=$？  【解答】$\overline{OM}\cdot\overline{ON}=2\sqrt{10}$ 【詳解】  過 M、N 做一圓與 $\overline{BO}$ 相切，則此圓與 $\overline{BO}$ 切點即為所求 P。 此時利用圓冪定理 $\overline{OP}^2=\overline{OM}\times\overline{ON}=40$，可得 $\overline{OP}=2\sqrt{10}$。 【備註】證明方式為在 $\overline{OB}$ 上另取一點 Q 異於 P，則由於圓周角 $\angle MPN=\angle MP'N$，可知 $\angle MPN=\angle MP'N=\angle P'MQ+\angle MQN>\angle MQN$。	104 陽 明 高 中			A 0 1 7 9