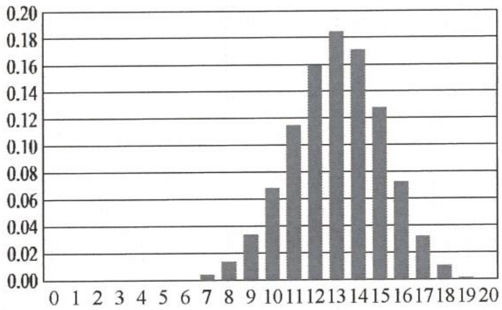
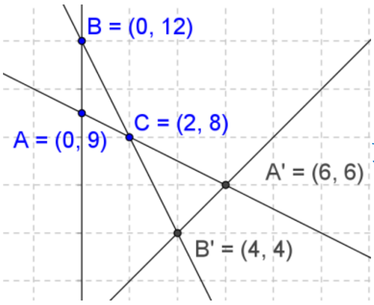
<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>設 $p(x)$ 為一個八次多項式，若 $p(n)=\frac{1}{n}$，$n=1,2,3,\ldots,9$，則下列敘述何者正確？
(1)方程式 $xp(x)-1=0$ 恰有 9 個整數根 (2) $p(x)$ 的 x^7 係數為-45 (3) $p(10)=\frac{1}{10}$ (4) $p(11)=1$

【解答】1、4
【詳解】(1) $xp(x)-1=0$ 為 $8+1=9$ 次多項式，由題意可知 $x=1,2,\ldots,9$ 代入皆可使方程式成立，故 1、2、…、9 為 $xp(x)-1=0$ 的 9 個整數根。
(2)設 $xp(x)-1=0=a(x-1)(x-2)\ldots(x-9)$，令 $x=0$ 代入，可得 $-1=a\cdot(-9!)$，$a=\frac{1}{9!}$。
所以 $p(x)=\frac{\frac{1}{9!}(x-1)(x-2)\ldots(x-9)+1}{x}$，$p(x)$ 的 x^7 係數為 $\frac{1}{9!}(x-1)(x-2)\ldots(x-9)$ 中的 x^8 係數，為 $\frac{(1+2+3+\ldots+9)}{9!}=\frac{5}{8!}$。
(3) $p(10)=\frac{\frac{1}{9!}(10-1)(0-2)\ldots(10-9)+1}{10}=\frac{2}{10}$
(4) $p(11)=\frac{\frac{1}{9!}(11-1)(11-2)\ldots(11-9)+1}{11}=\frac{10+1}{11}=1$</td>
<td>104 玉井工商</td>
<td>複選 1</td>
<td></td>
<td>A01446</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>設 $f(x)=\frac{(2^x-8)(7^x-1)}{(\log_2 x-3)(5^x+2)}$，當 a 為下列哪些值時，會使得 $f(a)<0$ ？
(1) $\sqrt{13}$ (2)圓周率 π (3) $3^{\sqrt{2}}$ (4) $\log 500$

【解答】1、2、3
【詳解】(1) $3<\sqrt{13}<4$ (2) $3<\pi<4$ (3) $3^{\sqrt{2}}=10^{\sqrt{2}\log 3}\approx 10^{0.6746}<10^{0.6990}=5$
(4) $\log 500=2+\log 5\approx 2.6990<3$，因此代入 $f(x)$ 只有第四個選項會小於 0。</td>
<td>104 玉井工商</td>
<td>複選 2</td>
<td></td>
<td>A01447</td>
</tr>
</table>

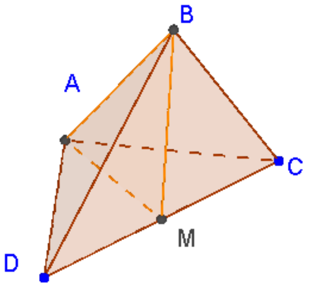
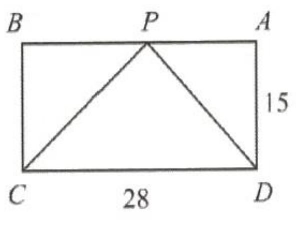
1	下圖是參數為 $X \sim B(20, p)$ 的二項分布(即重複做成功機率為 p 的伯努力試驗 20 次，其中成功的次數為 X)的機率分布圖：  若期望值為 $E(X)$ ，請選出正確的選項？ (1) $0.5 < p < 0.6$ (2) $0.6 < p < 0.7$ (3) $E(X) = 13$ (4)X 的標準差小於 4 【解答】2、4 【詳解】(1、2) 二項分布中，若 $(n+1)p$ 不為整數，眾數為 $[(n+1)p]$；若 $(n+1)p$ 為整數，則眾數為 $(n+1)p, (n+1)p-1$。圖中顯然眾數只有一個，因此解 $[(20+1)p] = 13$， $13 \le 21p < 14, \frac{13}{21} \le p < \frac{14}{21} \Rightarrow 0.619 \le p < 0.667$ 。 (3)期望值為 np，由於無法確定 p，因此無法求得確切值。 (4)變異數為 npq， $npq \le n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 5$ ，因此標準差小於 $\sqrt{5}$ 。 【備註】可以由 14 的次數多於 12 次，解 $C_{12}^{20} p^{12}(1-p)^8 < C_{14}^{20} p^{14}(1-p)^6 \Rightarrow \frac{(1-p)^2}{4} < \frac{p^2}{13}$ ，解得 $p > \frac{13}{9} - \frac{2\sqrt{13}}{9} \approx 0.64321$	104 玉 井 工 商	複 選 3		A 0 1 4 8

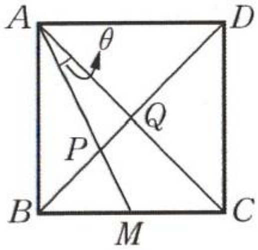
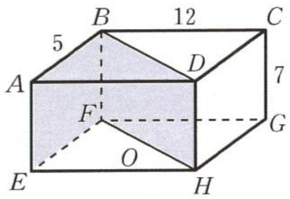
1	已知$\{z_n\}$為複數等比數列，且$z_1=2$ ，$z_2=a+bi$ ，$z_3=b+ai$，其中 a,b 為實數且 $a>0$ ，選出正確的選項？(1) $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) z_{10} 為實數 (3) $z_{12}\cdot z_{14}=4$ (4)數列的前 12 項的和 $z_1+z_2+...+z_{12}=0$ 【解答】3、4 【詳解】(1)由等比性質可知$(a+bi)^2=2(b+ai)$，展開可得$a^2-b^2+2abi=2b+2ai$。 因$a>0$， $a\neq 0$ ，所以虛部$2ab=2a\Rightarrow b=1$，代入實部$a^2-1=2, a=\pm\sqrt{3}$。 (2)若$a=\sqrt{3}$，則$z_2=\sqrt{3}+i$，公比$r=\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$， 同理若$a=-\sqrt{3}$，則$z_2=-\sqrt{3}+i$，公比$r=\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}=\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ$ 。 因此$r^{12}=1$，可知當$n=12k+1$，k為非負整數時，$z_n=z_{12k+1}=z_1\cdot r^{12k}=z_1=2$為實數。 (3)利用等比中項性質可知$z_{12}\cdot z_{14}=(z_{13})^2=2^2=4$ 。 (4) 因$r^{12}=1$，所以$(1+r+r^2+...+r^{11})=0$ ， 所求$z_1+z_2+...+z_{12}=z_1(1+r+r^2+...+r^{11})=0$ 。	104 玉 井 工 商	複 選 4		A 0 1 4 9
1	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x+3}}-\sqrt{3}}{x-1}=$ ？ 【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{24}$ 【詳解】原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x+3}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}\cdot 1}{1}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+3}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1+3}}=\dfrac{1}{8\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{24}$	104 玉 井 工 商	填 充 1		A 0 1 5 0
1	已知二次函數$f(x)=9\times\dfrac{(x-5)(x-7)}{(1-5)(1-7)}+9\times\dfrac{(x-1)(x-7)}{(5-1)(5-7)}-6\times\dfrac{(x-1)(x-5)}{(7-1)(7-5)}$，則$f(x)$最大值為？ 【解答】14 【詳解】由差值多項式定義可看出$f(1)=9, f(5)=9, f(7)=-6$，因此最大值發生在 1 和 5 的中間，為$f(3)$， $x=3$代入可得$f(3)=14$ 。	104 玉 井 工 商	填 充 2		A 0 1 5 1

1	設坐標平面上兩點 $A(0,9), B(0,12)$，若點 A', B' 在直線 $y=x$ 上，且 $\overline{AA'}$ 與 $\overline{BB'}$ 交於點 $C(2,8)$，試求 $\overline{A'B'}$ 的長度為？ 【解答】$2\sqrt{2}$ 【詳解】求出 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 的直線方程式，分別與 $y=x$ 求交點，兩交點即為 A', B'。 【備註】考試時間有限，不用寫方程式了，直接等差一下就有答案了。	104 玉 井 工 商	填 充 3		A 0 1 5 2
1	設 x 為任意實數，求 $y=\dfrac{3+\sin x}{2-\cos x}$ 的範圍為？ 【解答】$2-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\le y\le 2+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ 【詳解】移項整理可得 $2y-y\cos x=3+\sin x$，$2y-3=\sin x+y\cos x$，利用疊合可知 $\sin x+y\cos x=\sqrt{1+y^2}\cdot\sin(x+\theta)\le\sqrt{1+y^2}$，解 $2y-3\le\sqrt{1+y^2}$，可得 $3y^2-12y+8\le 0$，$\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}\le y\le\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$。	104 玉 井 工 商	填 充 4		A 0 1 5 3
1	甲箱內有二白球，乙箱內有三紅球，現在每次自各箱中隨機取一個球交換，令 k_i 表有 i 個紅球在甲箱內的事件，求在交換兩次後，有二紅球在甲箱內之機率為？ 【解答】$\dfrac{1}{3}$ 【詳解】交換第一次，甲箱內必為白紅，乙箱內必為白紅紅。 若第二次後希望甲有二紅球，代表第二次甲抽白球出來，乙抽紅球出來交換，機率為 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$。	104 玉 井 工 商	填 充 5		A 0 1 5 4

1	一列火車有 10 節車廂，設計師依下列條件來規劃： (1)在其中兩節車廂設立無障礙座位，此兩車廂要相鄰； (2)在其中 5 節車廂設有廁所，設立廁所的車廂彼此不相鄰 (3)在其中 3 節車廂設立販賣機，但不能與廁所設在同一車廂；若同時依照此三條件，這列火車有幾種的配置方式？ 【解答】540 【詳解】(1)可能為 1.、2 車廂或 2、3 車廂或……或 9、10 車廂，共有 9 種可能。 (2)先放好五個沒有廁所的車廂，在包含前後的 6 個空隙中選 5 個各插入一車廂，有 C_5^6 種。 (3)從沒廁所的 5 個車廂中選三個出來，有 C_3^5 種。 三種條件獨立，因此方法數為 $9\cdot C_5^6\cdot C_3^5=540$ 種。	104 玉 井 工 商	填 充 6		A 0 1 5 5
1	設 A 二階方陣，滿足 $A\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\sqrt{2}\end{bmatrix}$，求矩陣 $A^8=$？ 【解答】$\begin{bmatrix}31&-30\\15&-14\end{bmatrix}$ 【詳解】$A=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}^{-1}$， $A^8=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\sqrt{2}\end{bmatrix}^8\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}31&-30\\15&-14\end{bmatrix}$	104 玉 井 工 商	填 充 7		A 0 1 5 6

1	設 A,B,C,D 為數線上四相異點，P、Q 分別在 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 上，且 $\overline{AP}=\frac{1}{3}\overline{AD}$，$\overline{BQ}=\frac{1}{3}\overline{BC}$，若 $\overline{PQ}=1$，求 $2\overline{AB}+\overline{CD}$ 的最小值？ 【解答】3 【詳解】令 $P(0)$、$Q(1)$、$A(a)$、$B(b)$，則依照題意，利用線段長度關係，可設 $D(-2a)$ 或 $D(4a)$；$C(4b-3)$ 或 $C(-2b+3)$。(若為向量關係則只有某一邊) 因此 $2\overline{AB}+\overline{CD}=2\|a-b\|+\overline{CD}$，$\overline{CD}$ 可能 $\|4(a-b)+3\|$、$\|-2(a-b)+3\|$、$\|4b+2a-3\|$、$\|4a+2b-3\|$，前兩種狀況顯然最小值發生在 $a-b=0$ 時，最小值為 3； 後兩種情況，如 $2\|a-b\|+\|4b+2a-3\|=\|2b-2a\|+\|2(b-a)+2(b+a)-3\|\geq\|2(b+a)-3\|$ 等號成立時 $a=b$，最小時發生在 $a=b=0$，長度為 3。 【速解】令 $P=A=D$，$B=Q=C$，則所求 $2\overline{AB}+\overline{CD}$ 為 $3\overline{PQ}=3$	104 玉井工商	填充 8		A0157
1	已知三次函數 $f(x)=x^3+6x^2+13x+\int_0^2 f(x)dx$，求 $f(x)=$？ 【解答】 $f(x)=x^3+6x^2+13x-46$ 【詳解】令 $\int_0^2 f(x)dx=a$，則 $f(x)=x^3+6x^2+13x+a$， 解 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3+6x^2+13x+a)dx=a\Rightarrow\left.\frac{x^4}{4}+2x^3+\frac{13}{2}x^2+ax\right\|_0^2=a$ $\Rightarrow 4+16+26+2a=a, a=-46$。所以 $f(x)=x^3+6x^2+13x-46$。	104 玉井工商	填充 9		A0158

1	空間中有四點， $A(0,1,0),B(4,6,3),C(1,2,1),D(1,-2,-3)$ ，求包含 $\overline{AB}$ 且平分四面體 ABCD 之平面方程式？ 【解答】 $2x-7y+9z+7=0$ 【詳解】此平面必過 $\overline{CD}$ 中點 $M(1,0,-1)$ ，求過 A、B、M 的方程式即可平分 ABCD。 $\overrightarrow{AB}=(4,5,3),\overrightarrow{AM}=(1,-1,-1)$ ， $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AM}=(-2,7,-9)$ ，可設平面方程式為 $2x-7y+9z+k=0$ ，代點進去可解出 k=7，方程式為 $2x-7y+9z+7=0$ 。	104 玉 井 工 商	填 充 1 0		A 0 1 5 9
1	由兩曲線 $y=2x^2$ ， $y=4x$ 所圍成的區域為 S，則區域 S 繞 x 軸一周所得的旋轉體體積為 ？ 【解答】 $\dfrac{256\pi}{15}$ 【詳解】 $2x^2=4x,x=2$ 。 $V=\pi\int_0^2(4x)^2-(2x^2)^2dx=\frac{16}{3}x^3-\frac{4}{5}x^5\Big\|_0^2=\pi\cdot128\cdot(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})=\frac{256\pi}{15}$	104 玉 井 工 商	填 充 1 1		A 0 1 6 0
1	如右圖為一長 28，寬 15 的長方形 ABCD，P 為 $\overline{AB}$ 上一點，已知 $\overline{CP}$ 比 $\overline{DP}$ 多 8 單位長，求 $\overline{AP}$ 長=？ 【解答】8 【詳解】設 $\overline{DP}=x$ ， $\overline{CP}=x+8$ ，解 $\sqrt{x^2-15^2}+\sqrt{(x+8)^2-15^2}=28$ ， $x=17$ ($x=-25$ 不合) 【備註】直接找整數數字代表較快。	104 玉 井 工 商	填 充 1 2		A 0 1 6 1

1	如附圖，正方形 ABCD，M 為 $\overline{BC}$ 的中點，$\angle MAC=\theta$，則 $\tan\theta=$？ 【解答】$\dfrac{1}{3}$ 【詳解】座標化，設 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(2,2)$，$M(2,1)$，則 $\cos\theta=\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AM}}{\lvert AC\rvert\lvert AM\rvert}=\dfrac{6}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}$。	104 玉 井 工 商	填 充 1 3		A 0 1 6 2
1	設 $ABCD-EFGH$ 為一正方體(如圖)，其中 $\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=12$、$\overline{CG}=7$，設半平面 $ABFE$ 與半平面 $BDHF$ 所成二面角的度量 θ，求 $\sin\theta$ 之值 ？ 【解答】$\dfrac{12}{13}$ 【詳解】$\overline{BD}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，$\sin\theta=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\dfrac{12}{13}$	104 玉 井 工 商	填 充 1 4		A 0 1 6 3
1	設數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項 $a_1=1$，且滿足 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_{n-1}}+2n, n\geq 2$，則 $a_{20}=$？ 【解答】$\dfrac{1}{419}$ 【詳解】$\begin{aligned}\frac{1}{a_2}&=\frac{1}{a_1}+2\cdot 2\\ \frac{1}{a_3}&=\frac{1}{a_2}+2\cdot 3\\ &\vdots\\ \frac{1}{a_{20}}&=\frac{1}{a_{19}}+2\cdot 20\end{aligned}$ 左右累加並消去相同項，可知 $\dfrac{1}{a_{20}}=\dfrac{1}{1}+2\cdot(2+3+\ldots+20)=420-2+1=419$，因此 $a_{20}=\dfrac{1}{419}$	104 玉 井 工 商	填 充 1 5		A 0 1 6 4

<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>

求 $\left(\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{12}$ = ？

【解答】-1

【詳解】利用 $\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ，可知

$$\left(\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{12}=(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{12}=\cos3\pi+i\sin3\pi=-1$$

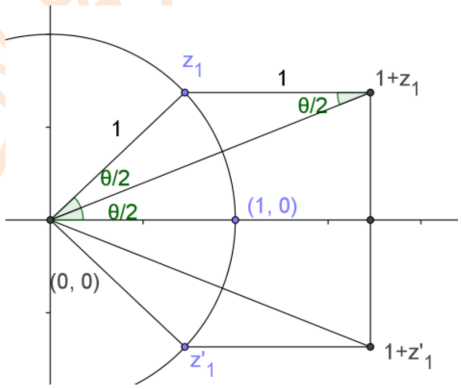
【證明】直接拆開

$$\begin{aligned}\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}&=\frac{(1+\cos\theta+i\sin\theta)^2}{(1+\cos\theta-i\sin\theta)(1+\cos\theta+i\sin\theta)}\\&=\frac{\left[1+2\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta\right]+2(1+\cos\theta)i\sin\theta}{2+2\cos\theta}\\&=\cos\theta+i\sin\theta\end{aligned}$$

或利用複數性質 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ ，令 $z_1=1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ ，

$z_2=1+\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}=\overline{z_1}$ ，由圖中等腰三角形性質，可知 $1+z_1$ 與 x 軸夾角為 $\dfrac{\theta}{2}$ ，進而推得 $1+z_1$ 與 $1+\overline{z_1}$ 的夾角為 θ ，又因長度相同，所以可證得

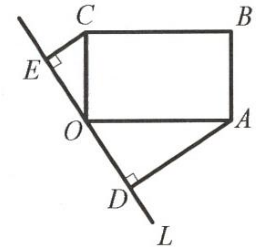
$\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$



</td>
<td>104
玉
井
工
商</td>
<td>填
充
1
6</td>
<td></td>
<td>A
0
1
6
5</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>

如圖，OABC 為一矩形，$\overline{AD}\perp L$，$\overline{CE}\perp L$，若$\overline{OD}=5,\overline{OE}=2$ ，求$\overline{OB}\cdot\overline{OD}=$



？

【解答】15

【詳解】$\overline{OB}\cdot\overline{OD}=(\overline{OA}+\overline{OC})\cdot\overline{OD}=\overline{OA}\cdot\overline{OD}+\overline{OC}\cdot\overline{OD}$，

由圖形垂直可知$\overline{OA}\cdot\overline{OD}=\overline{OD}\cdot\overline{OD}$、$\overline{OC}\cdot\overline{OD}=\overline{OE}\cdot\overline{OD}$，

所以$\overline{OB}\cdot\overline{OD}=\overline{OD}\cdot\overline{OD}+\overline{OE}\cdot\overline{OD}=5\cdot5+(-2)\cdot5=15$。

</td>
<td>104
玉
井
工
商</td>
<td>填
充
1
7</td>
<td></td>
<td>A
0
1
6
6</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>

$A(1,0),B(-1,0)$，圓 C：$(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上一點 P，求$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 之最大值？

【解答】100

【詳解】令 $P(3+2\cos\theta,4+2\sin\theta)$，所求

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(3+2\cos\theta-1)^2+(4+2\sin\theta)^2+(3+2\cos\theta+1)^2+(4+2\sin\theta)^2$

$=(2+2\cos\theta)^2+(4+2\sin\theta)^2+(4+2\cos\theta)^2+(4+2\sin\theta)^2$

$=8\cos^2\theta+8\sin^2\theta+24\cos\theta+32\sin\theta+52$

$=60+\sqrt{24^2+32^2}\sin(\theta+\phi)$

$\le 60+8\sqrt{3^2+4^2}=60+40=100$

</td>
<td>104
玉
井
工
商</td>
<td>填
充
1
8</td>
<td></td>
<td>A
0
1
6
7</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>

若多項式$a(3x-5)^5+b(3x-5)^4+c(3x-5)^3+d(3x-5)^2+e(3x-5)+k$

$=(5x+1)^5-4(5x+1)^4-72(5x+1)^3-56(5x+1)^2+15(5x+1)+10$，$a,b,c,d,e,k$ 為實數，試求$a+b+c+d+e+k=$？

【解答】54

【詳解】令$3x-5=1\Rightarrow x=2$ 代入，則右式即為所求$a+b+c+d+e+k$。

$a+b+c+d+e+k=(11)^5-4(11)^4-72(11)^3-56(11)^2+15(11)+10=54$

</td>
<td>104
玉
井
工
商</td>
<td>填
充
1
9</td>
<td></td>
<td>A
0
1
6
8</td>
</tr>
</table>

1	求極限：$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\ldots(1-\frac{1}{n^2})=$？ 【解答】$\frac{1}{2}$ 【詳解】$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\ldots(1-\frac{1}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2})(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3})(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4})\ldots\ldots=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$	104 玉井工商	填充 20		A0169