國立嘉義高級中學 104 學年度第 1 次教師甄選—數學科試題

請將答案寫在答案卷上。

一、多選題:(10 分，每題 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，錯三個選項以上不給分)

(　　　)1.下列哪些方程式有實數解?

(1)$x^3+x-1=0$　(2)$2^x+2^{-x}=0$　(3)$\log_2 x+\log_x 2=1$　(4)$\sin x+\cos 2x=3$　(5)$4\sin x+3\cos x=\frac{9}{2}$

(　　　)2.實係數多項式不等式 f(x)<0 的整數解共有 k 個，其中 k 為正整數，則下列敘述哪些是正確的?

(1) f(x)的次數必為奇數　(2) f(x)的最高次項係數必為正數　(3) f(x)<100 的整數解至少有 k 個

(4) f(x)>100 的整數解必有無限多個　(5) f(2x)<0 的整數解至少有 k 個

二、填充題:(75 分，每題 5 分)

1.某食品實驗室混合甲、乙兩種菌類製成一種新食品。調查發現乙菌個數是甲菌個數的一萬倍以上時，新食品才受歡迎。又知道甲菌一日後增加為 2 倍，乙菌增加為 5 倍。現在取同數量的甲、乙兩種菌，讓它們同時繁殖。試問至少第________天後混合甲、乙兩種菌類才能製成受歡迎的食品。（已知 $\log 2=0.3010$）

2.在△ABC 中，已知$\overline{AB}=5$，$\cos\angle ABC=-\frac{3}{5}$，且其外接圓半徑為$\frac{13}{2}$，則 $\sin\angle BAC=$_______。

3.令 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 為坐標平面上兩向量。已知 $\vec{A}$ 的長度為 1，$\vec{B}$ 的長度為 2 且 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 之間的夾角為 60°。令 $\vec{u}=\vec{A}+\vec{B}$，$\vec{v}=x\vec{A}+y\vec{B}$，其中 x、y 為實數且符合 $6\le x+y\le 8$ 以及 $-2\le x-y\le 0$，則內積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ 的最小值為_______。

4.在△ABC 中，M 為$\overline{BC}$邊之中點，若$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=5$，且 $\angle BAC=120°$，則 $\tan\angle BAM=$_______。

5.坐標空間中，在六個平面 $x=\frac{14}{13}$，$x=\frac{1}{13}$，$y=1$，$y=-1$，$z=-1$ 及 $z=-4$ 所圍成的長方體上隨機選取兩個相異頂點。若每個頂點被選取的機率相同，則選到兩個頂點的距離大於 3 之機率為________。

6.在△ABC 中，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=8$，$\cos\angle BAC=\frac{3}{8}$。設點 P、Q 分別在邊$\overline{AB}$，、$\overline{AC}$上使得△APQ 面積為△ABC 面積之一半，則 $\overline{PQ}$ 之最小可能值為_______。

7.一個抽獎活動依排隊順序抽獎，輪到抽獎的人有一次抽獎機會，抽獎方式為丟擲一枚公正銅板，正面為中獎，反面為沒中獎。獎品有三份，活動直到三份獎品都被抽中為止。則在排第四位的人可以抽獎的情況下，排第五位的人可以抽獎的條件機率為_______。

8.設三次實係數多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 在 x=0 的切線方程式為 $2x-y=-3$，在 x=6 的切線方程式為 $2x-y=7$，則數對 (a,b)= _______。

9.已知三角形 ABC 的三邊長滿足$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3\overline{AB}^2$，則 sinC 的最大值為______ 。

10.若一個正整數的各位數字都不是零且其和為 7，則所有這些正整數的位數中出現 3 的次數是_______次。

11.設 z=cosθ + i sinθ，其中$0^o<\theta<90^o$，$i=\sqrt{-1}$。若 z 本身也是 z 的十一次方根之一，則 θ=_______。(有兩解)

12.180 個數值 $\cos1^o$、$\cos2^o$、$\cos3^o$、....、$\cos n^o$、....、$\cos179^o$、$\cos180^o$的標準差為$\frac{\sqrt{k}}{180}$，則 k=_______。

13.設 x 的二次方程式$(m-2)x^2+(m^2-4m+3)x-(6m^2-2)=0$ 有實根，且此二根的立方和為 0，則 m=_______。

14.將一個半徑為 5 公分的鐵球，放入一個邊長 10 公分的正方體容器，再放入另一個小鉛球，然後蓋上正方體容器的蓋子，使蓋子與正方體完全密合，則小鉛球的最大半徑為_______公分。

15.有一個四位數 abcd 滿足$\begin{cases}a<b\\b>c\\c<d\end{cases}$，如 1327、2656、7801，滿足以上條件的四位數共有_______個。

三、證明題(15 分，第 1 題 8 分，第 2 題 7 分)

1. 給定一雙曲線Γ: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，試證明:雙曲線Γ的漸近線為 bx±ay=0。

2. 三角形 ABC 中，$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$，三邊 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$上的中點各別為 D、E、F，

令$\overline{AD}=m_a$，$\overline{BE}=m_b$，$\overline{CF}=m_c$， 證明 : $a^2+b^2+c^2\geq\frac{2}{\sqrt{3}}(am_a+bm_b+cm_c)$。