新北市立板橋高級中學104學年度第二次教師甄選　數學科試題

第一部分：每格5分，共60分

(1) 考慮正八面體相鄰兩個面夾角為θ，求$\tan\theta=$________。

(2) 設O為坐標平面的原點，若過點$P\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{12}{5}\right)$的直線分別與$x$軸，$y$軸的正向交於$A$，$B$兩點，則當$\Delta OAB$周長為最小值時，$\Delta OAB$的面積為________。

(3) 空間中兩直線$L_1:\dfrac{x-6}{-2}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-5}{-1}$與$L_2:\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-6}{7}=\dfrac{z-7}{4}$的其中一條分角線方程式為$\dfrac{x-6}{4}=\dfrac{y-b}{2}=\dfrac{z-c}{d}$，求$b+c+d=$________。

(4) 已知$a,b,c>0$且$\log_{0.5}(a+b+c)+\log_{0.5}a+\log_{0.5}b+\log_{0.5}c=0$，試求$\log_{0.5}(a+b)+\log_{0.5}(a+c)$最大值為________。

(5) 橢圓$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$有兩條水平切線，兩條斜率為2之切線，求此四條切線圍成的平行四邊形面積為________。

(6) 若k為整數，且$x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，則函數$f(x)=\dfrac{2\tan x}{1+2\sec x}$的最大值為________。

(7) k為整數，若$x^3+12x^2+(36+2k)x+280+12k=0$有三個整數根，試求$k=$________。

(8) 整係數三次函數$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，已知$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^5-1}=2$，且$a>b>0$，則數對$(a,b,c)=$________。

(9) 設a,b,c為實數，二次方程式$ax^2+bx+c=0$的二根為α,β，其中$-1\le\alpha\le0$，$1\le\beta\le2$，若$2a+b+c=4$，且$a\ge2\ge b\ge-8$，則$a+3b+2c$的最小值為________。

(10) 設對任意實數x,y，函數$f(x)$恆滿足$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，且導數$f'(0)=3$，則導函數$f'(x)=$________。

(11) 化簡$\displaystyle\prod_{n=2}^{24}\frac{n^3-2n^2+2n-1}{n^3+2n^2+2n+1}=$________。

(12) 對於所有整數 m,n 定義 $\dbinom{n}{m}=\begin{cases}\dfrac{n!}{m!(n-m)!} & \text{, if } n\ge m\ge0\\ 0 & \text{, otherwise}\end{cases}$ 及數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k}{n-k}$，$n\in\mathbb{N}$，則$a_{17}$的值為________。

第二部分：每格 8 分，共 40 分

(13) 若數列$\langle a_n \rangle$滿足 $(1+x+x^2)^{2015}=1+\sum_{k=1}^{4030} a_k x^k$，

則$a_1+a_5+a_9+\ldots+a_{4029}=$______________。

(14) x,y,z均為正實數,若滿足$\begin{cases} x \le \dfrac{z^2}{4+z^2} \\ \dfrac{y}{2} \le \dfrac{4x^2}{1+4x^2} \\ \dfrac{z}{4} \le \dfrac{y^2}{1+y^2} \end{cases}$，試求所有可能的$x=$________________。

(15) 設P，H分別為ΔABC的外心與垂心，若$\cos(A-B)=\dfrac{13}{14}$，$\overline{AC}=8$，$\overline{BC}=7$，

則$\overline{PH}=$________________。

(16) 數列$\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$滿足$a_1=-1$，$b_1=1$，$a_{n+1}=6a_n-6b_n$，$b_{n+1}=2a_n-b_n$，

請寫出b_{n+1}的一般式為________________。

(17) 給定一個正整數N 定義 $f(N;x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$,

其中a_0為N的個位數字，a_1為N的十位數字....，a_n為N的最高位數

例如: $f(3456;x)=6+5x+4x^2+3x^3$,而 $f(3456;1)=6+5\times1+4\times1^2+3\times1^3=18$

若$M=12345678910111213......20142015$

令$b_1=f(M;2)$，$b_{j+1}=f(b_j;2)$ 其中 $j=1,2,3,4....$，試求$\lim\limits_{j\to\infty} b_j=$________________。

新北市立板橋高級中學 104 學年度第二次教師甄選　數學科試題

參考答案

第一部份：每格 5 分，共 60 分

(1)	$-2\sqrt{2}$
(2)	6
(3)	32
(4)	-1
(5)	$8\sqrt{17}$
(6)	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
(7)	-66
(8)	$(3,1,-5)$
(9)	-60
(10)	$2x+3$
(11)	$\frac{1}{60100}$
(12)	2584

第二部份：每格 8 分，共 40 分

(13)	$\frac{3^{2015}-3}{4}$
(14)	$\frac{1}{2}$
(15)	3
(16)	$6\cdot 2^n-5\cdot 3^n$
(17)	7