

# 台北市立陽明高級中學 104 學年度教師甄選高中數學科筆試試題

## 一、 填充題：70% (共 10 題，每題 7 分)

1. 已知等比數列  $\{a_n\}$  的每一項均為實數，前  $n$  項和為  $S_n$ ，若  $S_{10} = 10$ ， $S_{30} = 70$ ，求  $S_{40} =$  \_\_\_\_\_。

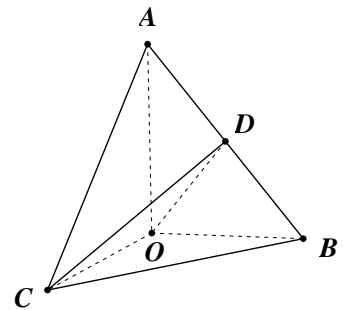
2. 設  $\triangle ABC$  的內角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所對應的邊長分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，且知  $a \cos B - b \cos A = \frac{3}{5}c$ ，則  $\tan A \cot B =$  \_\_\_\_\_。

3. 設  $\omega = \cos \frac{2\pi}{10} + i \sin \frac{2\pi}{10}$ ，則以  $\omega, \omega^3, \omega^7, \omega^9$  為根的方程式為\_\_\_\_\_。

4. 如右圖，已知  $\triangle AOB$  中  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ ， $\angle BAO = \frac{\pi}{6}$ ， $\overline{AB} = 4$ ，

$D$  是線段  $\overline{AB}$  的中點，若  $\triangle AOC$  是  $\triangle AOB$  繞直線  $\overline{AO}$  旋轉而

成的，若平面  $AOB$  與  $COD$  所夾的二面角為  $\frac{\pi}{3}$ ，平面  $AOB$  與  $AOC$  所夾的二面角為  $\theta$ ，則  $\sin \theta =$  \_\_\_\_\_。



5. 已知銳角  $\triangle ABC$  的外心為  $O$ ， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AC} = 10$ ，若  $\overrightarrow{AO} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ ，且  $2x + 10y = 5$ ，求  $\cos(\angle BAC) =$  \_\_\_\_\_。

6. 已知曲線  $\Gamma: y = x^2 + a$  到直線  $L: y = x + 2$  的距離等於圓  $C: x^2 + (y + 2)^2 = 2$  到直線  $L: y = x + 2$  的距離，則實數  $a =$  \_\_\_\_\_。

7. 已知圓  $x^2 + y^2 = 10$  與拋物線  $x^2 = 4y$  交於  $A$ 、 $B$  兩點， $F$  為拋物線的焦點，若過  $F$  且斜率為 1 的直線  $L$  與拋物線和圓交於四個不同的點，由左至右依次為  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 、 $P_4$ ，求

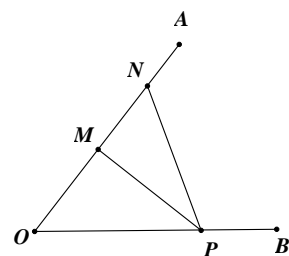
$\overline{P_1 P_2} + \overline{P_3 P_4} =$  \_\_\_\_\_。

8. 已知實數  $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，正實數  $x, y$  滿足  $(\log_a x)^2 + (\log_a y)^2 - \log_a (xy)^2 \leq 2$  且  $\log_a y \geq 1$ 。

令  $k = \log_a x^2 y$ ，則  $k$  的範圍為\_\_\_\_\_。

9. 有 4 對夫婦圍坐一圓桌，『恰有兩對』夫婦相鄰的坐法有\_\_\_\_\_種。

10. 如右圖， $M$ 、 $N$  是銳角  $\angle AOB$  的一邊  $\overline{OA}$  上的兩點，且  $\overline{OM} = 5$ ， $\overline{MN} = 3$ ，若點  $P$  是在  $\overline{OB}$  邊上使得  $\angle MPN$  最大，求  $\overline{OP} =$  \_\_\_\_\_。



## 二、計算證明題：30%

1. 已知  $a, b, c$  為實數，且  $a+b+c=0$ ， $abc=5$ ，證明： $a, b, c$  三數中必有一數大於  $\frac{5}{2}$ 。(8%)
2. 設  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  為一個整係數  $n$  次多項式，若整係數一次式  $ax - b$  是  $f(x)$  的因式，且  $a, b$  互質，證明  $a | a_n$  且  $b | a_0$ 。(10%)
3. 已知  $-2 \leq a \leq 2$ ，若函數  $f(x) = x^3 - 3x$ ，試就  $a$  討論方程式  $f(f(x)) = a$  的根的個數。(12%)