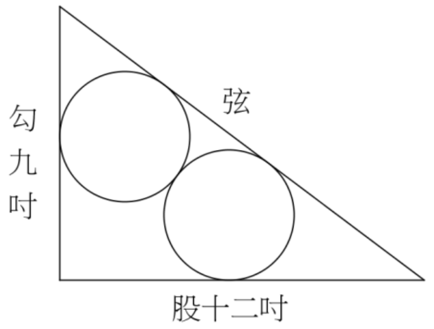
<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>

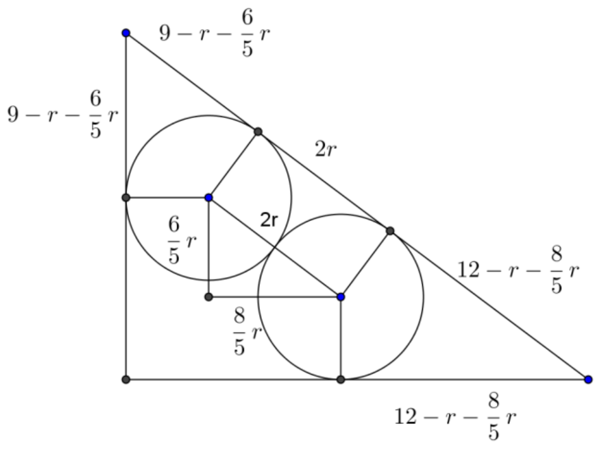
《天地明察》是關於和算家澀川春海的傳記故事，也納入澀川春海與同時代日本算聖關孝和的競爭，將數學知識活動，譬如解題與出題等對話，極為成功地融入故事情節之中。下圖是該小說裡一道數學題目的插圖：



在一勾九吋、股十二吋的直角三角形內，有兩個直徑相同的圓，彼此相切，與邊也相切，如上圖所示。試求這兩個相同圓的半徑？

【解答】$r=\dfrac{15}{7}$

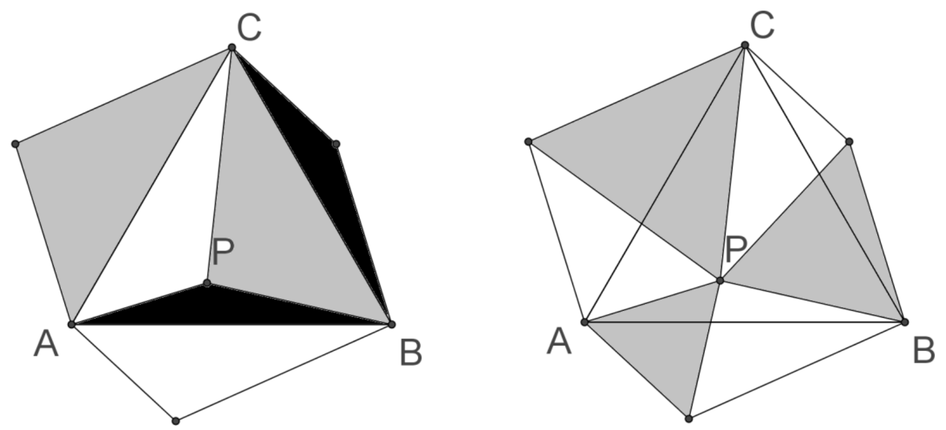
【詳解】



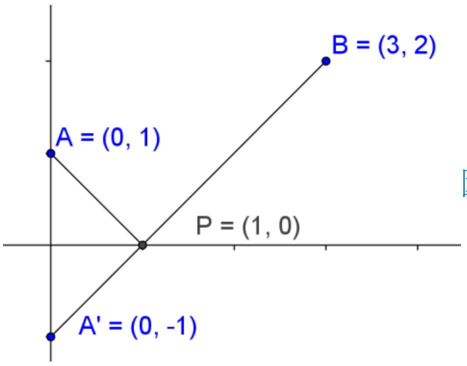
如圖，以兩圓連心線為斜邊，作與原三角形相似的直角三角形。若假設圓半徑為 r，由於三角形邊長比為 3:4:5，故小三角形邊長為 $\dfrac{6}{5}r,\dfrac{8}{5}r,2r$ ，代入原三角形計算斜邊

$\left(9-r-\dfrac{6}{5}r\right)+2r+\left(12-r-\dfrac{8}{5}r\right)=15$ ，可得 $r=\dfrac{15}{7}$

</td>
<td>104木柵高工、103新北聯招</td>
<td></td>
<td>填充1</td>
<td>A0123</td>
</tr>
</table>

1	設 a 為實數，若對於所有實數 x，$\left\|\dfrac{x^2+ax+3}{x^2+x+2}\right\|<2$ 恆成立，則 a 的範圍為？ 【解答】$0<a<4$ 【詳解】分母 $x^2+x+2=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0$ 恆正。 計算 $-2<\dfrac{x^2+ax+3}{x^2+x+2}<2$，得 $-2x^2-2x-4<x^2+ax+3<2x^2+2x+4$。 左式 $-2x^2-2x-4<x^2+ax+3$，$\Rightarrow 0<3x^2+(a+2)x+7$， 判別式 $D=(a+2)^2-4\cdot 3\cdot 7<0$，可解得 $-2\sqrt{21}-2<a<2\sqrt{21}-2$。 右式 $x^2+ax+3<2x^2+2x+4$，$\Rightarrow 0<x^2+(2-a)x+1$，判別式 $D=(2-a)^2-4<0$，可解得 $0<a<4$。 取交集可得 $0<a<4$。	104 木 柵 高 工		填 充 2	A 0 1 2 4
1	若 P 為正 ΔABC 內部一點，且滿足 $\overline{AP}=4,\overline{BP}=6,\overline{CP}=\sqrt{28}$，則 ΔABC 的邊長為？ 【解答】$2\sqrt{19}$ 【詳解】  P 點將正三角形 ABC 分為三個小三角形，依左圖的方式向外旋轉 $60°$，分別做三個全等的小三角形，可以得到此六邊形面積為原三角形的 2 倍。 再將 P 點與此六邊形的另外三個頂點連線，可得到此六邊形面積為三個邊長分別是 $\overline{AP},\overline{BP},\overline{CP}$ 的正三角形，與三個由 $\overline{AP},\overline{BP},\overline{CP}$ 圍成的全等三角形。 以 $\overline{AP}=4,\overline{BP}=6,\overline{CP}=\sqrt{28}$ 圍成的三角形面積為 $6\sqrt{3}$，所以 ΔABC 的面積= $\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4^2+6^2+\sqrt{28}^2)+3\times 6\sqrt{3}\right]=19\sqrt{3}$，解 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=19\sqrt{3}$，可知邊長 $a=2\sqrt{19}$。	104 木 柵 高 工		填 充 3	A 0 1 2 5

1	從 2,3,5,7,9 五個數字中剔除一個數字後，將剩下的四個數字經適當的排列之後，得到一個完全平方數，則此完全平方數為？ 【解答】5329 【詳解】設此完全平方數為 $(10a+b)^2$，a,b 為 1、2、....、9。 由於 $(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$，由於 $1^2=1,2^2=4,3^2=9$、$4^2=16,5^2=25,6^2=36$、$7^2=49,8^2=64,9^2=81$，可觀察出 $(10a+b)^2$ 的個位數字只有可能為 5 或 9，b 只有可能為 3 或 5 或 7。 而十位數字可能來自 b^2 與 $20ab$，其中 $20ab$ 為偶數，而無論 b 是 3 或 5 或 7，b^2 乘開後的十位數字都是偶數，所以可知 $(10a+b)^2$ 的十位數字是偶數，只有可能為 2。 若為 $(10a+3)^2$，展開後 $100a^2+60a+9$，欲滿足十位數字是 2，a 只有可能為 2、7，但 $23^2=529$ 不合，答案為 $73^2=5329$。 若為 $(10a+5)^2$，展開後 $100a^2+100a+25$，必滿足十位數字是 2，但單看千位數與百位數為 $a+a^2=a(a+1)$ 必為偶數，不可能由剩下的 $3,5,7,9$ 組成，故不合。 若為 $(10a+7)^2$，展開後 $100a^2+140a+49$，欲滿足十位數字是 2，a 可能為 2、7，但 $27^2=729$，$77^2=5929$ 皆不合。 因此答案為 $73^2=5329$。	104 木 柵 高 工		填 充 4	A 0 1 2 6
1	設 a，n 為正整數，找出所有數對 (a,n)，使得 a^n+3^n 能整除 $a^{n+1}+2\cdot 3^n$。 【解答】$(12,1),(2,n),n\in N$ 【詳解】$a^n+3^n \mid a^{n+1}+2\cdot 3^n \Rightarrow a^n+3^n \mid a^{n+1}+2\cdot 3^n-a(a^n+3^n) \Rightarrow a^n+3^n \mid (2-a)\cdot 3^n$ 若 $a=2$，則 n 可為任意正整數。 若 $a\neq 2$，考慮 $a=3k,3k-1,3k-2$，$\forall k\in N$。 若 $a=3k-1$，則 $a^n+3^n \mid (2-a)\cdot 3^n$ 可化為 $(3k-1)^n+3^n \mid (2-3k+1)\cdot 3^n$，但 $(3k-1)^n+3^n$ 不為三的倍數，因此不合。同理，$a\neq 3k-2$。 若 $a=3k$，則 $a^n+3^n \mid (2-a)\cdot 3^n$ 可化為 $(3k)^n+3^n \mid (2-3k)\cdot 3^n \Rightarrow 3^n(k^n+1) \mid (2-3k)\cdot 3^n$，故解 $(k^n+1) \mid (2-3k)$，顯然若 $n\geq 2$ 且 $k>1$ 時，無整數解。 若 k=1，$1^n+1 \mid 2-3$，不合。 若 $n=1$，解 $k+1 \mid 2-3k$，可知 $k+1 \mid 5$，得 $k=4$，此時 $(a,n)=(3k,1)=(12,1)$。	104 木 柵 高 工		填 充 5	A 0 1 2 7

1	如果 x 是實數，那麼$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-6x+13}$，在 x 為多少時，會有最小值？ 【解答】1 【詳解】$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-6x+13}=\sqrt{x^2+1^2}+\sqrt{(x-3)^2+2^2}$ 可視為 $P(x,0),A(0,1),B(3,2)$ 中，$\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值。 P 為 x 軸上一點，A 對 x 軸做對稱點 $A'(0,-1)$，連接 $\overline{A'B}$，與 x 軸交點即為 P 點 $(1,0)$。  因此此題 x=1 時，有最小值 $3\sqrt{2}$ 。	104木柵高工		填充6	A0128

1

有一種娛樂用的號碼鎖，他有三個密碼，每個密碼都是由 1,2,3 這三個數字所構成。開鎖者只要轉對其中的兩(含)個密碼以上，所就會自動開啟，例如當密碼為 $(1,2,3)$ 時，轉 $(1,3,2)$ 是不會開的(只轉對一個密碼)，但是轉 $(1,3,3)$ 就會打開(轉對了第 1,3 位置的密碼)。問：對付這種娛樂鎖，你至少需嘗試幾次才保證一定能打開？

【解答】5

【詳解】密碼共有 $3^3=27$ 種組合。

不失一般性，先由 111 與 222 開始試起，各可破解 7 種密碼，此時剩餘 13 種。

接下來可用(233)、(323)、(332)或(133)、(313)、(331)來破解，因此共需 $2+3=5$ 次。

1	1	1	111
1	1	2	111
1	1	3	111
1	2	1	111
1	3	1	111
2	1	1	111
3	1	1	111
1	2	2	222
2	1	2	222
2	2	1	222
2	2	2	222
2	2	3	222
2	3	2	222
3	2	2	222

2	3	3	233
2	3	1	233
2	1	3	233
1	3	3	233
3	2	3	323
3	2	1	323
3	1	3	323
1	2	3	323
3	3	3	332
3	3	2	332
3	3	1	332
3	1	2	332
1	3	2	332

【備註】若使用 111、222、333 會造成剩餘的 6 種密碼必須試三次才能試完。

1	1	1	111
1	1	2	111
1	1	3	111
1	2	1	111
1	3	1	111
2	1	1	111
3	1	1	111
1	2	2	222
2	1	2	222
2	2	1	222
2	2	2	222
2	2	3	222
2	3	2	222
3	2	2	222

1	3	3	333
2	3	3	333
3	1	3	333
3	2	3	333
3	3	1	333
3	3	2	333
3	3	3	333

1	2	3	122
1	3	2	122
2	1	3	211
2	3	1	211
3	1	2	311
3	2	1	311

104 木柵高工

填充 7

A0129

1	若$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=2 \\ a^3+b^3+c^3=3 \end{cases}$，則$a^4+b^4+c^4=$？ 【解答】$\dfrac{25}{6}$ 【詳解】$\begin{cases} a+b+c=1\text{....................(1)} \\ (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=2\text{....(2)} \\ (a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc=3\text{....(3)} \end{cases}$ 由(1),(2)可得$(ab+bc+ca)=-\dfrac{1}{2}$，代入(3)可得$abc=\dfrac{1}{6}$，可寫出以 a,b,c 為三根的方程式為$t^3-t^2-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{6}=0$。 因此有$a^3-a^2-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{6}=0$，同乘以 a 並移項可得$a^4=a^3+\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{6}$，同理可知$b^4,c^4$。 所求$a^4+b^4+c^4=(a^3+b^3+c^3)+\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+\dfrac{1}{6}(a+b+c)=\dfrac{25}{6}$。	104木柵高工		填充8	A0130